Lineare Algebra 1
4. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
10.11.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Seien G, H Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv.

(b) Der Kern von f ist trivial, d.h. $f^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}$.

Lösungshinweise: Wenn f injektiv ist, kann $f^{-1}(\{e_H\})$ höchstens aus einem Element bestehen. Wegen $f(e_G) = e_H$ ist die erste Implikation also klar. Sei umgekehrt der Kern von f trivial, und seien $g_1, g_2 \in G$ mit $f(g_1) = f(g_2)$. Weil f ein Homomorphismus ist, folgt $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)^{-1} = e_H$, d.h. $g_1 g_2^{-1}$ liegt im Kern von f. Da der Kern trivial ist, muss $g_1 = g_2$ gelten.

Aufgabe G2
Seien S_1, S_2 zwei Halbgruppen. Zeigen Sie: Für einen bijektiven Homomorphismus $f : S_1 \to S_2$ ist die Umkehrabbildung wieder ein Homomorphismus.

Lösungshinweise: Seien $a_2, b_2 \in S_2$. Setzt $a_1 := f^{-1}(a_2)$ und $b_1 := f^{-1}(b_2)$. Dann gilt $a_2 b_2 = f(a_1)f(b_1) = f(a_1 b_1)$ und somit $f^{-1}(a_2 b_2) = a_1 b_1 = f^{-1}(a_2)f^{-1}(b_2)$.

Aufgabe G3 (Fingerübungen)
Sei R ein Ring, sodass mit $a^2 = a$ für jedes $a \in R$. Zeigen Sie:

(a) $a + a = 0$ für alle $a \in R$.

(b) R ist kommutativ.

(c) Hat R eine Eins, so ist jedes Element $a \neq 1$ ein Nullteiler.

Hinweis: Für $a, b \in R$ betrachten Sie das Element $(a + b)^2$.

Lösungshinweise:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a + b = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b\ .$$

Addition von $-a - b$ liefert dann $0 = ab + ba$. Speziell für $b := a$ erhalten wir also $0 = a^2 + a^2 = a + a$ für jedes $a \in R$.

(b) Speziell für das Element ab folgt somit aus $ab + ba = 0$ auch

$$ab = ab + ba + ba = 0 + ba = ba\,,$$

d.h. R ist kommutativ.

(c) Hat R eine Eins, $1 \in R$, so folgt für jedes $1 \neq a \in R$

$$a(a+1) = a^2 + a = a + a = 0\,.$$

Aufgabe G4
Sei G ein Gruppe. Zeigen Sie: Für eine nicht-leere Teilmenge $H \subseteq G$ sind äquivalent:

(a) H ist eine Untergruppe von G.

(b) Für alle $a, b \in H$ gilt auch $ab^{-1} \in H$.

Lösungshinweise:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe, und seien $a, b \in H$. Dann liegt auch b^{-1} und damit ab^{-1} in H.
- (b) $\Rightarrow$ (a): Sei hierzu $H \subseteq G$ eine nicht-leere Teilmenge mit Eigenschaft (b). Weil H nicht leer ist, gibt es ein Element $h \in H$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $e = hh^{-1} \in H$. Für jedes Element $a \in H$ folgt dann nach (b) auch $a^{-1} = ea^{-1} \in H$. Für zwei Elemente $a, b \in H$ gilt also auch $b^{-1} \in H$ und damit nach Voraussetzung $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Untergruppen von $\mathbb{Z}$) (4 Punkte)
Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $k\mathbb{Z} := \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von dieser Form ist.

Lösungshinweise:

(a) Das neutrale Element $0 = k \cdot 0$ liegt in $k\mathbb{Z}$.
Seien $a, b \in k\mathbb{Z}$. Dann gibt es $n_a, n_b \in \mathbb{Z}$ mit $a = kn_a$ und $b = kn_b$. Somit liegen auch $a + b = kn_a + kn_b = k(n_a + n_b)$ und $-a = -(kn_a) = k(-n_a)$ in $k\mathbb{Z}$.

(b) Sei $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe. Ist $H = \{0\}$, so brauchen wir nichts zu zeigen, denn $\{0\} = 0\mathbb{Z}$. Wir nehmen deshalb im Folgenden o.B.d.A. $H \neq \{0\}$ an. Wir setzen

$$k := \min\{n \in H \mid n > 0\}$$

und wollen zeigen, dass $H = k\mathbb{Z}$ gilt.
Zuerst zeigen wir $k\mathbb{Z} \subseteq H$. Sei hierzu $a \in k\mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $a = kn$. Weil nach Konstruktion $k \in H$ gilt, folgt daraus

$$a = kn = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n \text{ viele Summanden}} \in H\,.$$

Nun zeigen wir $H \subseteq k\mathbb{Z}$. Wir zeigen dies durch einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es ein $a \in H \setminus (k\mathbb{Z})$ gibt. Durch Division durch k mit Rest erhalten wir ein $q \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \{0, \dots, n-1\}$ mit

$$a = k \cdot q + r\ .$$

Das Element kq liegt in $k\mathbb{Z} \subseteq H$. Somit liegt wegen $a, kq \in H$ auch $r = a - k \cdot q$ in H. Aufgrund der Konstruktion von k muss dann $r = 0$ gelten, denn andernfalls wäre k nicht minimal. Es folgt $a = kq \in k\mathbb{Z}$ und dies steht im Widerspruch zur Annahme $a \notin k\mathbb{Z}$.

Aufgabe H2 (Translationen und Konjugationen) (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Wir bezeichnen mit $S(G)$ die Menge der Permutationen (bijektiven Selbstabbildungen) von G.

(a) (Ohne Wertung) Machen Sie sich klar, dass $S(G)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen ist. Was ist das neutrale Element?

(b) Für ein Element $g \in G$ betrachten wir die Abbildung $\lambda_g : G \to G$, $\lambda_g(x) := gx$. Zeigen Sie:
   i. λ_g ist bijektiv. Was ist die Umkehrabbildung λ_g^{-1}?
   ii. Die Abbildung $\lambda : G \to S(G)$, $g \mapsto \lambda_g$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

   Die Abbildung λ_g heißt auch *Linkstranslationen* um g. Der Homomorphismus $g \mapsto \lambda_g$ heißt auch die *linksreguläre Darstellung* von G.

(c) Für eine Element $g \in G$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_g : G \to G$, $\varphi_g(x) := gxg^{-1}$. Zeigen Sie:
   i. φ_g ist ein Automorphismus. Was ist die Umkehrabbildung φ_g^{-1}?
   ii. Die Abbildung $\varphi : G \to S(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Wann ist dies Abbildung injektiv?

   Die Abbildung φ_g heißt auch *Konjugation* mit g. Der Homomorphismus $g \mapsto \varphi_g$ heißt oft auch die *adjunkte Darstellung* oder *adjungierte Darstellung* von G.

Lösungshinweise:

(b) i. $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$, einfach nachrechnen.
   ii. Injektivität ist z.B. wg. $\lambda_g(e) = g$ klar. Die Homomorphismus-Eigenschaft rechnet man einfach nach: $\lambda_e = id_G$ und $\lambda_{gh} = \lambda_g \circ \lambda_h$.

(c) i. Die Homomorphismus-Eigenschaft ist schnell nachgerechnet:

$$\varphi_g(x)\varphi_g(y) = gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} = \varphi_g(xy)\,, \quad \varphi_g(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e\ .$$

   Für die Bijektivität rechnet man $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ einfach nach.
   ii. Klar $\varphi_e = \mathrm{id}_G$. Außerdem

$$(\varphi_g \circ \varphi_h)(x) = \varphi_g(hxh^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = \varphi_{gh}(x)\ .$$

   Zur Injektivität: Zuerst überlege man sich für $g \in G$, dass φ_g genau dann die Identität ist, wenn $gh = hg$ für alle $h \in G$ gilt (also wenn g im Zentrum von G liegt). Somit ist $g \mapsto \varphi_g$ genau dann injektiv, wenn es für jedes $g \in G$ ein $h \in H$ mit $gh \neq hg$ gibt (also G triviales Zentrum hat).

Aufgabe H3 (Erzeugte Untergruppen) (4 Punkte)
Sei G eine beliebige Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Beliebige Schnitte von Untergruppen sind wieder Untergruppen.
Genauer: Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untergruppen $G_i \subseteq G$. Dann ist auch der Schnitt $\bigcap_{i\in I} G_i$ eine Untergruppe von G.

(b) Sei $S \neq \emptyset$ eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen mit $\langle S\rangle$ den Schnitt über alle Untergruppen $H \subseteq G$ mit $S \subseteq H$:

$$\langle S\rangle := \bigcap_{S\subseteq H\subseteq G \text{ Untergruppe}} H \,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (a):

i. $\langle S\rangle$ ist eine Untergruppe von G mit $S \subseteq \langle S\rangle$.

ii. Für jede Untergruppe $H \subseteq G$ mit $S \subseteq H$ gilt $\langle S\rangle \subseteq H$.

Das heißt $\langle S\rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die S enthält. Die Menge $\langle S\rangle$ heißt die von S erzeugte Untergruppe.

(c) Zeigen Sie, dass $\langle S\rangle$ genau aus den Produkten von Elementen von S und deren Inversen besteht, d.h.

$$\langle S\rangle = \{g_1 g_2 \dots g_n \mid n \in \mathbb{N},\ \forall 1 \leq k \leq n.\ g_k \in S \text{ oder } g_k^{-1} \in S\} \,.$$

Lösungshinweise:

(a) Da $e \in G_i$ für jedes $i \in I$, gilt auch $e \in \bigcap_i G_i$. Seien $g, h \in \bigcap_i G_i$, d.h. $g, h \in G_i$ für jedes $i \in I$. Dann gilt auch $gh \in G_i$ und $g^{-1} \in G_i$ für jedes $i \in I$, also $gh, g^{-1} \in \bigcap_i G_i$.

(b) i. Klar nach (a), da $\langle S\rangle$ Schnitt von Untergruppen.

ii. Auch klar, da $\langle S\rangle$ per Konstruktion gerade der Schnitt über solche Untergruppen ist.

(c) Wir bezeichnen die Menge der Produkte aus Elemente von S und deren Inverse mit H_0. Weil $\langle S\rangle$ eine Gruppe ist, die S enthält, liegen all diese Produkte in $\langle S\rangle$, also $H_0 \subseteq \langle S\rangle$. Umgekehrt verifiziert man leicht, dass H_0 eine Untergruppe von G ist, die S enthält. Nach (b) folgt dann $\langle S\rangle \subseteq H_0$.