Lineare Algebra 1
3. Übungsblatt
Lösungshinweise

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
04.11.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wobei handelt es sich um ein Monoid bzw. eine Gruppe?

	$(\mathbb{R}^n, +, 0)$	$(\mathbb{R}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{N}, +, 0)$	$(\mathbb{Z}, -, 0)$
Monoid						
Gruppe						

Welche der folgenden Mengen sind mit der angegebenen Verknüpfung Gruppen? Was ist ggf. das neutrale Element? Welche Verknüpfungen sind assoziativ, welche kommutativ?

(a) $(\mathbb{Q}, *)$ mit $a * b := a + 2b$,
(b) $(\mathbb{N}, *)$ mit $a * b := \min(a, b)$,
(c) $(\mathbb{Q}, *)$ mit $a * b := \frac{1}{2}(a + b)$.
(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ mit $a * b := 2ab$.

Lösungshinweise:

	$(\mathbb{R}^n, +, 0)$	$(\mathbb{R}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{N}, +, 0)$	$(\mathbb{Z}, -, 0)$
Monoid	ja	ja	ja	ja	ja	nein
Gruppe	ja	nein	ja	nein	nein	nein

(a) Keine Gruppe, da $*$ nicht assoziativ ist:

$$(a * b) * c) = a + 2b + 2c \neq a * (b * c) = a + 2b + 4c$$

$*$ ist auch nicht kommutativ: $a * b = a + 2b \neq b * a = 2a + b$.

(b) Die Operation $*$ ist zwar assoziativ, aber es gibt kein neutrales Element (da $\mathbb{N}$ kein größtes Element besitzt). $*$ ist auch kommutativ.

(c) Keine Gruppe, da $*$ nicht assoziativ ist:

$$(a * b) * c) = \frac{a + b + 2c}{4} \neq a * (b * c) = \frac{2a + b + c}{4}$$

Aber $*$ ist kommutativ.

(d) Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ:

$$a * (b * c) = 4abc = (a * b) * c$$

Das neutrale Element ist $e = \frac{1}{2}$, denn für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt: $a * e = a = e * a$. Zu jedem $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist das Inverse $a^{-1} = \frac{1}{4a}$. Damit ist dieses eine Gruppe. Weiterhin ist $*$ auch kommutativ, also sogar eine abelsche Gruppe.

Aufgabe G2 (Fingerübungen)

(a) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in G$ die sog. *Kürzungsregel* gilt:

$$ac = bc \qquad \Longrightarrow \qquad a = b\,.$$

(b) Finden Sie ein Monoid, in welchem die Kürzungsregel gilt, das aber keine Gruppe ist.

(c) Finden Sie ein Monoid, in welchem die Kürzungsregel nicht gilt.

Lösungshinweise:

(a) Multiplikation mit c^{-1} von rechts. (b) Z.B. $\mathbb{N}$ mit Addition.
(c) Z.B. $\mathbb{N}_0$ mit Multiplikation.

Aufgabe G3 (Permutationen)
Betrachten Sie die beiden Permutationen

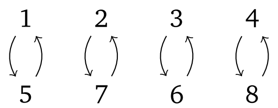
$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Veranschaulichen Sie die Permutationen π und σ jeweils durch Zeichnungen mit acht Punkten.

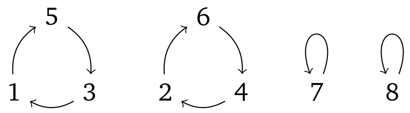
(b) Berechnen Sie π^{-1}, σ^{-1}, π^2, π^3, σ^2 und σ^3.

Lösungshinweise:

(a) Für π:



Für σ:



(b) Die Rechenergebnisse zur Kontrolle: $\pi^2 = \mathrm{id}$, $\pi^3 = \pi$, $\sigma^3 = \mathrm{id}$. Die Inversen erhällt man zum einen durch Vertauschen (und Neuordnen) der oberen und unteren Zeile, zum anderen ergibt sich aus den Gleichungen $\pi^{-1} = \pi$ und $\sigma^{-1} = \sigma^2$ mit

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4 (Die Diedergruppe)
Sei $n \geq 3$. Wir betrachten ein gleichseitiges n-Eck mit den Eckpunkten $p_1, p_2, \dots, p_n$. Die Diedergruppe D_n ist die Menge aller (längenerhaltenden) bijektive Transformationen, die das n-Eck wieder in sich überführen (z.B. Spiegelungen oder Drehungen).

(a) Machen Sie sich klar, dass D_n eine Gruppe bildet.

(b) In den Übungen haben wir bereits gesehen, dass die Menge $S(M)$ der Permutationen von $M := \{p_1, \dots, p_n\}$ eine Gruppe bildet. Wie lässt sich eine Transformation in D_n eindeutig als Permutation der Eckpunkte $p_1, \dots, p_n$ darstellen? Folgern Sie, dass sich D_n als Untergruppe von $S(M)$ auffassen lässt.

(c) Gilt $D_n = S(M)$?

(d) Zeigen Sie, dass D_n nicht abelsch ist.

(e) (offene Aufgabe) Finden Sie eine möglichst große echte Untergruppe von D_n. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe abelsch ist.

Lösungshinweise:

(a) Die Verknüpfung bildet die Hintereinanderausführung. Das neutrale Element ist die Transformation, die das n-Eck unverändert lässt. Wir schreiben hierfür Id.

(b) Jede Transformation des n-Ecks transformiert eine Ecke wieder auf eine Ecke. Somit lässt sich jeder Transformation α auch eine Permutation der Ecken zuordnen durch

$$\sigma_\alpha : M \to M, \quad p_i \mapsto \alpha(p_i).$$

Durch diese Permutation ist α eindeutig bestimmt, denn durch das Bild aller Eckpunkte ist eine Transformation des n-Ecks eindeutig bestimmt. (Genauer genügt schon das Bild zweier nebeneinander liegender Eckpunkte.)
Außerdem gilt für alle Transformationen α, β des n-Ecks

$$\sigma_{\mathrm{Id}} = \mathrm{id}_M \qquad \sigma_{\alpha\circ\beta} = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \qquad \sigma_{(\alpha^{-1})} = (\sigma_\alpha)^{-1}$$

Statt mit Transformationen des n-Ecks zu rechnen können wir also auch mit den zugehörigen Permutationen in $S(M)$ rechnen. Wir identifizieren im Folgenden D_n mit der Teilmenge $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in D_n\} \subseteq S(M)$. (Dies ist nach den obigen Rechenregeln eine Untergruppe von $S(M)$.)

(c) Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass $p_1, \dots, p_n$ auch in dieser Reihenfolge im n-Eck auftauchen, d.h. p_i ist jeweils mit p_{i+1} bzw. p_n mit p_1 verbunden.

Für $n = 3$ gilt dann $D_3 = S(M)$. Man überlegt sich hier leicht, dass alle 6 Elemente von $S(M)$ auch durch Transformationen des Dreiecks darstellbar sind.

Für $n > 3$ gilt hingegen $D_n \neq S(M)$. Hier liegt z.B. die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$$

nicht in D_n, weil es keine zugeörige Transformation des n-Ecks gibt. Die Transformation müsste alle Eckpunkte bis auf p_2 und p_3 gleich lassen und die Punkte p_2 und p_3 vertauschen. Doch eine solche Transformation überführt nicht das n-Eck in sich.

(d) Wir betrachten eine Drehung des n-Ecks α und eine Spiegelung β mit den zugehörigen Permutationen

$$\tau_\alpha := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_n & p_1 \end{pmatrix}, \qquad \tau_\beta := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_1 & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderausführung $\alpha \circ \beta$ bzw. $\beta \circ \alpha$ haben dann die zugehörige Permutationen

$$\tau_{\alpha\circ\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_2 & p_1 & p_n & \cdots & p_4 & p_3 \end{pmatrix},$$
$$\tau_{\beta\circ\alpha} = \tau_\beta \circ \tau_\alpha = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Sei M eine beliebige Menge. Besonders einfach sind die folgenden Permutationen von M:

$$a_1 \mapsto a_2, \qquad a_2 \mapsto a_3, \qquad \dots \qquad a_k \mapsto a_1$$

mit paarweise verschiedenen Elementen $a_1, \dots, a_k \in M$, wobei die übrigen Elemente von M nicht bewegt werden. Für eine solche Permutation schreiben wir auch $(a_1\, a_2 \dots a_k)$ und nennen sie einen *Zyklus*.

(a) (Ohne Wertung) Machen Sie sich klar, dass $(a_1\, a_2 \dots a_k) = (a_2\, a_3 \dots a_k\, a_1)$ gilt.

(b) Berechnen Sie die inverse Permutation zu $(1\,3\,5\,7)$ und allgemeiner zu einem Zyklus $\tau = (a_1 \dots a_k)$.

(c) Berechnen Sie $(1\,2\,3) \circ (2\,4)$ und $(2\,4) \circ (1\,2\,3)$.

Man kann zeigen, dass sich jede Permutation auf M als ein Produkt (Komposition) von Zyklen schreiben lässt.

(d) Stellen Sie die Permutationen aus Aufgabe G3(1) als Produkt (Komposition) von Zyklen dar.

Lösungshinweise:

(b) $(1\,3\,5\,7)^{-1} = (7\,5\,3\,1)$.

(c) $(1\,2\,3) \circ (2\,4) = (1\,2\,4\,3)$ und $(2\,4) \circ (1\,2\,3) = (1\,4\,2\,3)$.

(d) $\pi = (1\,5)(2\,7)(3\,6)(4\,8)$ und $\sigma = (1\,5\,3)(2\,6\,4)$.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

(a) In jeder Zeile und jeder Spalte der folgenden Verküpfungstafel kommt jedes Element genau einmal vor. Trotzdem handelt es sich nicht um eine Gruppentafel. Warum nicht?

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

(b) Seien $s,t \in \mathbb{Z}$. Man betrachte auf $\mathbb{Z}$ die Verknüpfung $\odot$ mit

$$a \odot b := sa + tb$$

für alle $a,b \in \mathbb{Z}$. Für welche s,t ist diese Verknüpfung assoziativ bzw. kommutativ?

Lösungshinweise:

(a) Die Verknüpfung ist nicht assoziativ, beispielsweise gilt $(ab)d = cd = a$, aber $a(bd) = ac = d$.

(b) Es gilt

$$(a \odot b) \odot c = (sa + tb) \odot c = s(sa + tb) + tc = s^2 a + stb + tc$$

und analog

$$a \odot (b \odot c) = a \odot (sb + tc) = sa + t(sb + tc) = sa + tsb + t^2 c,$$

also ist die Verknüpfung genau dann assoziativ, falls $(s^2 - s)a = (t^2 - t)c$ für alle $a,c \in \mathbb{Z}$. Diese Gleichung ist für $s,t \in \{0,1\}$ erfüllt. Entsprechend erhält man aus

$$a \odot b = sa + tb = sb + ta = b \odot a$$

die Gleichung $a(s-t) = b(s-t)$, welche genau für $s = t$ erfüllt ist.

Aufgabe H3 (Isometriegruppen) (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^n$ der n-Tupel reeller Zahlen mit der euklidischen Länge

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *längenerhaltend* oder auch eine *Isometrie*, falls

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$$

für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(a) Geben Sie mindestens drei Isometrien des $\mathbb{R}^2$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ aller bijektiven Isometrien des $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Ist $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ abelsch?

Lösungshinweise:

(a) Z.B. die Identität oder $(x_1,x_2) \mapsto (-x_1,x_2)$ oder $(x_1,x_2) \mapsto (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_2\cos\alpha + x_1 \sin\alpha)$ (Drehung) oder $(x_1,x_2) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$ für $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ (Translation).

(b) Wir müssen nur zeigen, dass $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ eine Untergruppe der Permutationen von $\mathbb{R}^n$ ist: Das neutrale Element $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ ist tatächlich eine Isometrie (trivial). Für zwei Isometrien φ,ψ ist die Komposition $\varphi \circ \psi$ wieder eine Isometrie, denn

$$\|\varphi(\psi(x)) - \varphi(\psi(y))\| = \|\psi(x) - \psi(y)\| = \|x - y\|$$

für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$. Außerdem ist auch die Umkehrabbildung φ^{-1} wieder eine Isoemtrie, denn

$$\|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)\| = \|\varphi(\varphi^{-1}(x)) - \varphi(\varphi^{-1}(y))\| = \|x - y\|$$

für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Die Gruppe $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ ist für $n > 0$ nicht abelsch, wie schon die obigen Beispiele zeigen.