Lineare Algebra 1
2. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
26.10.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Welche der folgenden Mengen sind gleich?

i. $\{1,2\}$, ii. $\{(1,2)\}$, iii. $\{1,\{1,2\}\}$, iv. $\{1,2,\{1,2\}\}$.

(b) Existieren Funktionen der folgenden Art?

[ ] $\mathbb{Z} \to \emptyset$, [ ] $\emptyset \to \emptyset$, [ ] $\emptyset \to \mathbb{Z}$.

(c) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn

[ ] $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)\, f(x) = y$. [ ] $(\exists y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y$.
[ ] $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y$. [ ] $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, f(x) = y$.

(d) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn

[ ] $(\forall x, x' \in X)\, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. [ ] $(\forall x, x' \in X)\, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$.
[ ] $(\forall x, x' \in X)\, x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$. [ ] $(\forall x, x' \in X)\, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Lösungshinweise:

(a) Alle verschieden.

(b) Es gibt genau eine Funktion $\emptyset \to \emptyset$ und $\emptyset \to \mathbb{Z}$, jedoch keine Funktion $\mathbb{Z} \to \emptyset$.

(c) Die Lösung unten links ist korrekt.

(d) Die Antworten links oben und rechts unten sind korrekt.

Aufgabe G2

Sei X eine Menge und $\{M_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Mengen. Zeigen Sie

$$X \cap \Big(\bigcup_{j\in J} M_j\Big) = \bigcup_{j\in J} (X \cap M_j)\,, \qquad X \cup \Big(\bigcap_{j\in J} M_j\Big) = \bigcap_{j\in J} (X \cup M_j)\,.$$

Lösungshinweise: Wir zeigen die Inklusion $X \cap \big(\bigcup_j M_j\big) \subseteq \bigcup_j (X \cap M_j)$. Die übrigen Inklusionen werden analog bewiesen: Sei $x \in X \cap \big(\bigcup_j M_j\big)$, d.h. $x \in X$ und es gibt ein $j_0 \in J$ mit $x \in M_j$. Damit gilt $x \in X \cap M_{j_0}$, also $x \in \bigcup_j (X \cap M_j)$.

Aufgabe G3 (Einfache Potenzmengen)

Schreiben alle Elemente der Potenzmenge von

(a) $X := \emptyset$, (b) $X := \{a\}$, (c) $X := \{a,b\}$, (d) $X := \{a,b,c\}$,
(e) der Potenzmenge von $X := \{a,b\}$.

Wieviel Elemente hat die Potenzmenge einer n-elementigen Menge für $n = 0,1,2,3$. Ist die Potenzmenge von X größer als X, kleiner oder gleich groß?

Lösungshinweise:

(a) $\{\emptyset\}$, (b) $\{\emptyset, \{a\}\}$, (c) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,
(d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Aufgabe G4 (Eigenschaften von Relationen)
Sei M eine Menge. Eine Relation R über $M \times M$ kann folgende Eigenschaften haben:

(a) *reflexiv:* $\forall x \in M : xRx$
(b) *symmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \Rightarrow yRx$
(c) *transitiv:* $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
(d) *antisymmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, welche der obigen Eigenschaften zutreffen.

(a) Sei M die Menge der Einwohner Darmstadts und R die Relation „x wohnt im selben Stadtteil wie y“.
(b) Sei $M = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und sei R die Relation „x ist kleiner oder gleich y“.
(c) Sei $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und sei R die Relation „x ist Teiler von y“.
(d) Sei $M = \mathscr{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2\}$ und sei R die Relation „x ist Teilmenge von y“.

Eine Relation auf $M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist; sie heißt *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Ein Halbordnung, die total ist, heißt *lineare Ordnung*. Entscheiden Sie, welche der drei genannten Begriffe auf die obigen Beispiele von Relationen zutreffen.

Lösungshinweise:

(a)
- R ist reflexiv, weil x im selben Stadtteil wie x wohnt.
- Wenn x im selben Stadtteil wie y wohnt, so wohnt y im selben Stadtteil wie x. Deshalb ist R symmetrisch.
- Seien x, y und z drei Bewohner Darmstadt. Angenommen, dass x im selben Stadtteil wie y wohnt und y im selben Stadtteil wie z wohnt. Daraus folgt, daß x im selben Stadtteil wie z wohnt. Das heißt, R ist transitiv.
- Angenommen, dass es einen Stadtteil gibt, wo mindestens zwei verschiedene Personen wohnen. Seien x und y solche Personen. Wegen der Annahme wohnt x im selben Stadtteil wie y. Wegen der Annahme wohnt auch y im selben Stadtteil wie x. Nach Annahme sind x und y ungleich. Daraus folgt, dass R nicht antisymmetrisch ist.
- Angenommen, dass es zwei Stadtteile gibt, wo mindestens eine Person wohnt. Seien x und y zwei Bewohner verschiedener Stadtteile. x wohnt nicht im selben Stadtteil wie y und y wohnt nicht im selben Stadtteil wie x. Daraus folgt, dass R nicht total ist.

(b) Die Relation $\leq$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und total. Sie ist aber nicht symmetrisch.
(c) Die Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Sie ist aber nicht symmetrisch und nicht total. Z.B. is 2 kein Teiler von 3 und 3 ist auch kein Teiler von 2.
(d) Die Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Sie ist aber nicht symmetrisch und nicht total. Z.B. ist $\{1\}$ keine ist Teilmenge von $\{2\}$ und $\{2\}$ ist auch keine ist Teilmenge von $\{1\}$.

Somit ist (a) eine Äquivalenzrelation, (b), (c) und (d) sind Halbordnungen, (b) sogar eine lineare Ordnung.

Aufgabe G5
Sei $f : M \to N$ eine Funktion und seien A und B Teilmengen von M. Beweisen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Geben Sie ein Beispiel mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Lösungshinweise:

(a) Es gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\iff (\exists x \in M) x \in A \cup B \ \wedge\ f(x) = y \\
&\iff (\exists x \in M)(x \in A \ \vee\ x \in B) \ \wedge\ f(x) = y \\
&\iff (\exists x \in M)(x \in A \ \wedge\ f(x) = y) \ \vee\ (x \in B \ \wedge\ f(x) = y) \\
&\iff \big((\exists x \in M) x \in A \ \wedge\ f(x) = y\big) \ \vee\ \big((\exists x \in M) x \in B \ \wedge\ f(x) = y\big) \\
&\iff y \in f(A) \cup f(B)\,.
\end{aligned}$$

Mit sind die Mengen $f(A \cup B)$ und $f(A) \cup f(B)$ gleich.

(b) Es gelten folgende Implikationen:

$$
\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) \quad &\Longrightarrow \quad (\exists x \in M) x \in A \cap B \;\wedge\; f(x) = y \\
&\Longrightarrow \quad (\exists x \in M) x \in A \;\wedge\; x \in B \;\wedge\; f(x) = y \\
&\Longrightarrow \quad \big((\exists x \in M) x \in A \;\wedge\; f(x) = y\big) \;\wedge\; \big((\exists x \in M) x \in B \;\wedge\; f(x) = y\big) \\
&\Longrightarrow \quad y \in f(A) \cap f(B)\,.
\end{aligned}
$$

Somit liegt jedes Element aus $f(A \cup B)$ auch in $f(A) \cap f(B)$, d.h. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
Als Gegenbeispiel betrachte die Funktion $f : \{0,1\} \to \{0\}$. Dann liefert $A := \{0\}$ und $B := \{1\}$ ein Gegenbeispiel, denn $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ aber $f(A) \cap f(B) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$.

Hausübung

Aufgabe H1

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $C \subseteq Y$ definieren wir

$$f^{-1}(C) := \{x \in X \mid f(x) \in C\}\,.$$

Zeigen Sie für beliebige Teilmengen $C, D \subseteq Y$:

(a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, (b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Aufgabe H2 (Verknüpfung von Funktionen)

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Wir definieren

$$g \circ f := \{(x,z) \in X \times Z\,;\; \exists y \in Y : (x,y) \in f \;\wedge\; (y,z) \in g\}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $g \circ f$ ist eine Funktion $g \circ f : X \to Y$, und für alle $x \in X$ gilt $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

(b) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

(c) Finden Sie ein Beispiel, sodass $g \circ f$ nicht bijektiv ist, obwohl f injektiv und g surjektiv ist.

(d) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ bijektiv ist, obwohl f nicht surjektiv ist und g nicht injektiv ist.

Lösungshinweise:

(a)

Sei $x \in X$

1) Wir zeigen zuerst, dass es ein $z \in Z$ gibt mit $(x,z) \in g \circ f$:
Weil f eine Funktion ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in f$.
Weil g eine Funktion ist, gibt es ein $z \in Z$ mit $(y,z) \in g$.
Nach Def. von $g \circ f$ gilt dann $(x,z) \in g \circ f$.

2) Wir zeigen jetzt, dass es <u>genau</u> ein $z \in Z$ mit $(x,z) \in g \circ f$ gibt. Hierfür seien $z_1, z_2 \in Z$ mit $(x,z_1), (x,z_2) \in g \circ f$.
Wir wollen zeigen, dass dann $z_1 = z_2$ gelten muss:
Nach Def. von $g \circ f$ gibt es $y_1, y_2 \in Y$ mit
$(x, y_1) \in f$ und $(y_1, z_1) \in g$,
$(x, y_2) \in f$ und $(y_2, z_2) \in g$.
Weil f eine Funktion ist, muss dann $y_1 = y_2$ gelten, und weil g eine Funktion ist, folgt daraus auch $z_1 = z_2$.

3) Ist $z = (g \circ f)(x)$, so gibt es nach Def. ein $y \in Y$ mit
$y = f(x)$ und $z = g(y)$
$\Rightarrow z = g(y) = g(f(x))$

(b) Sei $x, y \in A$, damit $f(x) = f(y)$. Es gilt $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Daraus folgt $x = y$, weil $g \circ f$ bijektiv ist. Deshalb ist f injektiv. Sei $y \in C$. Es gibt $x \in A$, damit $g \circ f(x) = y$, weil $g \circ f$ bijektiv ist. Deshalb ist g surjektiv.

(c) $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ sodass $f(x) = x$ und $g : \{0,1\} \to \{0\}$.

(d) $f : \{0\} \to \{0,1\}$ sodass $f(0) = 0$ und $g : \{0,1\} \to \{0\}$.

Aufgabe H3

Zeigen Sie: Für eine Funktion $f : X \to Y$ sind äquivalent:

(a) f ist bijektiv.

(b) Es gibt eine Funktion $g : Y \to X$, sodass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$x = (g \circ f)(x), \qquad y = (f \circ g)(y).$$

Lösungshinweise:

$\Rightarrow$/ Sei f injektiv und surjektiv. Wir definieren

$$g := \{(y,x) \in Y \times X \mid y = f(x)\}$$

und wollen zeigen, dass g eine Funktion ist

i) Sei $y \in Y$. Weil f surjektiv ist, gibt es dann ein $x \in X$ mit $y = f(x)$, also $(y,x) \in g$.

ii) Sei $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ mit $(y,x_1), (y,x_2) \in g$. Nach Def. von g gilt dann $y = f(x_1) = f(x_2)$. Weil f injektiv ist, folgt daraus $x_1 = x_2$.

Aus i) und ii) folgt dann, dass g eine Funktion ist.

$x = (g \circ f)(x)$/ Sei $x \in X$. Setze $y := f(x)$. Dann gilt nach Def. von g auch $x = g(y)$ und somit

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$$

$y = (f \circ g)(y)$ zeigt man analog.

$\Leftarrow$/ Sei $y \in Y$.

i) Wir setzen $x := g(y)$. Dann gilt

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$$

ii) Sei $x' \in X$ ein weiteres Element mit $y = f(x')$. Dann gilt

$$x' = (g \circ f)(x') = g(f(x')) = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$$

Es gibt also genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$.