Lineare Algebra 1
1. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
20.10.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Politik)
Ein Politiker wird in einem Wahlkampf gefragt, ob er für oder gegen das Verbot von Alkohol ist. Da er sich um eine Antwort drücken will, sagt er: „Ich habe mich stets gegen die Absicht gewandt, die Gegner der Bekämpfung der Antialkoholbewegung zu unterdrücken.“ Ist der Mann für oder gegen das Alkoholverbot?

Lösungshinweise: Von Politikern erwarte ich, dass sie sich verständlicher ausdrücken. (Von Fragestellern, dass sie politisch relevante Fragen stellen.)

Aufgabe G2 (Äquivalenz in der Aussagenlogik)
Welche der folgenden aussagelogischen Formeln sind allgemein gültig? Welche sind immer falsch?

(a) $p \vee \neg p$ (b) $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$ (c) $p \wedge \neg p$ (d) $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$

Lösungshinweise: (a), (b) und (d) sind allgemein gültig, deshalb sind sie zueinander äquivalent; (c) ist immer falsch.

Aufgabe G3
Seien M eine Menge und A, B und C Teilmengen von M.

(a) Beweisen Sie $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$.
(b) Vervollständigen und beweisen Sie $A \cup \emptyset =?$ und $A \cap \emptyset =?$.
(c) Vergleichen Sie $(A \cup B) \cup C$ und $A \cup (B \cup C)$. Welche einfachere Notation kann man daraus herleiten?

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?

Lösungshinweise:

(a) Folgt aus der Kommutativität von $\vee$ und $\wedge$.
(b) $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$.
(c) Die Aussage $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ folgt aus der Assoziativität von $\vee$. Deshalb darf man $A \cup B \cup C$ schreiben.

Aufgabe G4
Sei M eine Menge. Drücken Sie die Negationen der folgenden Aussagen so aus, dass die Negationssymbole so weit rechts wie möglich stehen:

(a) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)\, P(x,y)$,

(b) $(\forall x \in M)\, P(x) \vee \big((\forall y \in M)\, Q(y)\big)$,

(c) $(\forall x \in M)\, P(x) \vee \big((\exists y \in M)\, Q(x,y) \wedge R(y)\big)$,

(d) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)\, \big(P(y) \Rightarrow y = y\big)$.

Lösungshinweise:

(a) $\exists x \in M : \forall y \in M : \neg P(x,y)$

(b) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge (\exists y \in M : \neg Q(y))$

(c) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge (\forall y \in M : \neg Q(x,y) \vee \neg R(y))$

(d) $\exists x \in M : \forall y \in M : (P(y) \wedge y \neq y)$

Aufgabe G5 (Kartesisches Produkt)

(a) Was sind die Elemente des Produkts $(\{1,2,3\} \times \{4,5\})$?

(b) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \{0\}$?

(c) Sei A eine Menge mit n Elemente. Wie viele Elemente gibt es in $A \times \{3\}$?

(d) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \emptyset$? Was ist eigentlich die Menge $\{1,2,3\} \times \emptyset$?

Lösungshinweise:

(a) $(1,4), (2,4), (3,4), (1,5), (2,5), (3,5)$.

(b) $(1,0), (2,0), (3,0)$.

(c) n Elemente.

(d) Es gibt kein Element, weil $\{1,2,3\} \times \emptyset = \emptyset$.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)
Schreiben Sie die folgenden Aussagen als „umgangssprachliche" Sätze. Welche der Aussagen gelten in den natürlichen Zahlen? Begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, n = k^2$,

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, n^2 = k$,

(c) $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, n^2 = k$,

(d) $(\forall n \in \mathbb{N})\big(((\exists k \in \mathbb{N})\, n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 5k\big)$.

Lösungshinweise:

(a) Jede natürliche Zahl ist eine Quadratzahl (d.h. Quadrat einer natürlichen Zahl). (Falsch, z.B. für $n = 2$.)

(b) Für jede natürliche Zahl ist das Quadrat eine natürliche Zahl. (Stimmt.)

(c) Es gibt eine natürliche Zahl, die das Quadrat jeder natürlichen Zahl ist. (Falsch, z.B. $1^2 \neq 2^2$.)

(d) Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl durch 5 teilbar, so ist auch die Zahl selbst durch 5 teilbar. (Stimmt, lässt sich z.B. mit der Primfaktorzerlegung zeigen.)

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Seien M eine beliebige Menge und $A, B \subseteq M$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) (De Morganschen Regeln)

$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)\,, \qquad M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)\,.$$

(b) Ist $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$, so gilt $A \cap B = \emptyset$.

Lösungshinweise:

(a) Wir zeigen beispielhaft die Inklusion $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Sei hierzu $x \in M \setminus (A \cup B)$, d.h. $x \in M$ und $x \notin A \cup B$. Nach Definition folgt aus $x \notin A \cup B$, dass weder $x \in A$ noch $x \in B$ gilt, also $x \notin A$ und $x \notin B$. Zusammen mit $x \in M$ gilt damit $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$, also $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

Die umgekehrte Inklusion lässt sich völlig analog zeigen, sodass man die erste Gleichung erhällt. Alternativ macht man sich leicht klar, dass man jedes der obigen Argumente auch umkehren kann. Die zweite Gleichung lässt sich völlig analog zeigen.

(b) Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen $x \in A \cap B \subseteq A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Also gilt $x \in A \setminus B$, insbes. $x \notin B$, oder $B \setminus A$, insbes. $x \notin A$. Beides widerspricht also $x \in A \cap B$.

Aufgabe H3 (Mengenlehre) (4 Punkte)

Die symmetrische Differenz zweier Teilmengen A, B einer Menge M ist definiert als

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

(a) Veranschaulichen Sie die Definition der symmetrischen Differenz durch eine Skizze.

(b) Zeigen Sie nun formal, dass für zwei Teilmengen A, B einer Menge M gilt:

i. Kommutativität: $A \triangle B = B \triangle A$

ii. Neutrales Element: $A \triangle \emptyset = A$

iii. Inverses Element: $A \triangle A = \emptyset$

Lösungshinweise:

(b) i.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$$

ii.

$$A \triangle \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$$

iii.

$$A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$