

Fachbereich Mathematik  
 Prof. Dr. Michael Kohler  
 Dipl.-Math. Andreas Fromkorth  
 Dipl.-Inf. Jens Mehnert



TECHNISCHE  
 UNIVERSITÄT  
 DARMSTADT

SS 2009  
 17.07.09

## Klausur

„Anal. u. Stoch. f. LaGM (PO 98), Teil 2: Stochastik  
 Stochastik f. LaGM (PO 05)  
 Praktische Mathematik, Aufbaumodul Stoch. f. BSc. MCS,  
 Einf. i. d. Stoch. f. BSc. Mathe, WiMathe, MCS, Econ.“

Name: ..... | Vorname: .....  
 Matrikel-Nr.: ..... | Studiengang: .....

Aufgabe	1	2	3	4	max	Note
Bearbeitet (ankreuzen)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3 (2) /4 Aufgaben	
Punktzahl	10	10	10	10	30 (20)	
erreichte Punktzahl						

## Hinweise

1. Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen mit Ausnahme eines Fremdsprachenwörterbuchs.
2. Bei der Prüfung „Analysis und Stochastik für LaGM (PO 98)“ werden **zwei der folgenden vier Aufgaben** verlangt und gewertet. Für alle anderen im Titel genannten Prüfungen werden **drei der folgenden vier Aufgaben** verlangt und gewertet. Kreuzen Sie in obiger Tabelle an, welche Aufgaben gewertet werden sollen.
3. Bei der Prüfung „Analysis und Stochastik für LaGM (PO 98)“ beträgt die Prüfungsdauer 60 Minuten. Bei allen anderen im Titel genannten Prüfungen beträgt die Prüfungsdauer 90 Minuten.
4. Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.
5. Es ist eigenes Papier zu verwenden. Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Papierbogen. Jedes Blatt ist **vor der Verwendung** deutlich mit Name, Matrikelnummer und Aufgabennummer zu versehen. Beachten Sie, dass nicht beschriftete Blätter nicht gewertet werden müssen.
6. Füllen Sie bevor Sie mit der eigentlichen Bearbeitung der Klausur beginnen die obigen Felder sorgfältig aus. **Aus dem Eintrag im Feld Studiengang muss hervorgehen, an welcher Prüfung Sie teilnehmen.**
7. Legen Sie Studien- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

## 1. Aufgabe

(10 Punkte)

Gegeben sei eine zweidimensionale Messreihe

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

vom Umfang  $n$ . Anstelle einer Geraden (wie bei der linearen Regression) könnte man analog auch eine Parabel

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

durch Minimierung von

$$F(a, b, c) := \sum_{i=1}^n (y_i - (a + b \cdot x_i + c \cdot x_i^2))^2$$

an die Daten anpassen. Zeigen Sie (durch Nullsetzen geeigneter Ableitungen), dass die Werte  $a, b, c$ , für die  $F(a, b, c)$  minimal wird, Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ a \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ a \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i \end{aligned}$$

sind.

**Hinweis:** Sie müssen nicht zeigen, dass es sich bei der Lösung des Gleichungssystems wirklich um ein Minimum handelt.

## 2. Aufgabe

(10 Punkte)

Ein Glücksrad bleibt nach dem Drehen rein zufällig auf einem von insgesamt 50 Feldern stehen. Bleibt es auf einem der 10 blau gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 5 Euro ausgezahlt. Bleibt es auf einem der 5 grün gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 10 Euro ausgezahlt. Und bleibt es auf dem *einzigem* roten Feld stehen, so wird ein Gewinn von 100 Euro ausgezahlt. Auf den übrigen 34 weiß gefärbten Feldern wird kein Gewinn ausgezahlt.

- Wie groß ist der Gewinn "im Mittel", und wie groß ist die "mittlere quadratische Abweichung" zwischen dem zufälligen Gewinn und dem Gewinn "im Mittel" ?
- Für einmaliges Drehen verlangt der Besitzer des Glücksrads einen Einsatz von 5 Euro. Damit beträgt sein Verdienst bei einmaligen Drehen  $Y = 5 - X$ , wobei  $X$  der ausgezahlte Gewinn ist. Wie groß ist sein Verdienst "im Mittel", und wie groß ist die "mittlere quadratische Abweichung" zwischen dem zufälligen Verdienst und dem Verdienst "im Mittel"?

- (c) Der Besitzer betreibt sein Glücksrad einen Monat lang auf einem Jahrmarkt. In dieser Zeit drehen dabei  $n = 6000$  Personen (unbeeinflusst voneinander) am Glücksrad. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes eine untere Schranke für den Verdienst des Besitzers in diesem Monat, die (ungefähr) mit Wahrscheinlichkeit 0.95 überschritten wird.

**Hinweise:** Seien  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $\mathbf{P}_{Y_i} = \mathbf{P}_Y$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wobei  $Y$  die in b) eingeführte ZV ist. Gesucht ist dann  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{P}[\sum_{i=1}^n Y_i \geq x] \approx 0.95$ .

Ist  $Z$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, so gilt

$$\mathbf{P}[Z \geq -1.65] \approx 0.95.$$

*Eine numerische Berechnung des Ergebnisses wird nicht verlangt. Es sollte aber in einer Form angegeben werden, die eine sofortige Lösung mittels Taschenrechner ermöglicht.*

### 3. Aufgabe

(10 Punkte)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein W-Raum und seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Zufallsvariablen, für die  $\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y$  und  $\mathbf{E}(X \cdot Y)$  existieren. Dann heißt

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y))$$

die Kovarianz von  $X$  und  $Y$ .

- (a) Zeigen Sie: Für  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\text{Cov}(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1 \cdot a_2 \cdot \text{Cov}(X, Y).$$

- (b) Zeigen Sie:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y.$$

- (c) Seien  $(X, Y), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  unabhängig identisch verteilt. Ist der Schätzer

$$\hat{C}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i - \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad \text{mit } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \text{ und } \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

ein konsistenter bzw. ein erwartungstreuer Schätzer für  $\text{Cov}(X, Y)$ ? Begründen Sie ihre Antwort.

**Hinweise:** Für  $i \neq j$  sind  $X_i$  und  $Y_j$  unabhängig und daher gilt in diesem Fall

$$\mathbf{E}(X_i \cdot Y_j) = \mathbf{E}X_i \cdot \mathbf{E}Y_j.$$

- (d) Geben Sie (ohne Begründung) einen konsistenten **und** erwartungstreuen Schätzer für  $\text{Cov}(X, Y)$  an.

#### 4. Aufgabe

(10 Punkte)

Bei einer Lotterie gibt es drei Sorten von Losen. Zieht man ein Los der Sorte 1 bzw. 2 bzw. 3, so bekommt man keinen Preis bzw. einen Trostpreis bzw. einen Hauptpreis. Der Anteil der Lose der Sorte 1 bzw. 2 bzw. 3 sei  $p_1$  bzw.  $p_2$  bzw.  $p_3$ , wobei  $p_1, p_2, p_3 \in [0, 1]$  mit  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . Es kann davon ausgegangen werden, dass sich der Anteil der Lose durch Ziehen eines Loses nicht bzw. nur vernachlässigbar ändert.

- (a) Wie groß darf der Anteil  $p_1$  der Lose der Sorte 1 höchstens sein, dass man bei Kauf von zehn Losen mit Wahrscheinlichkeit größer oder gleich 0.99 mindestens einen Preis (Trost- oder Hauptpreis) bekommt ?

*Eine numerische Berechnung des Ergebnisses wird nicht verlangt. Es sollte aber in einer Form angegeben werden, die eine sofortige Lösung mittels Taschenrechner ermöglicht.*

- (b) Um die unbekanntenen Anteile  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  der verschiedenen Losarten zu schätzen, kauft Dozent K.  $n = 1000$  Lose und beobachtet, dass darunter  $n_1 = 917$  bzw.  $n_2 = 74$  bzw.  $n_3 = 9$  Lose vom Typ 1 bzw. 2 bzw. 3 sind. Bestimmen Sie die zu diesen Daten gehörende Maximum-Likelihood-Schätzung von  $(p_1, p_2, p_3)$ .

**Hinweise:** Hier ist  $p_3$  gegeben durch  $1 - p_1 - p_2$ . Seien  $x_1, \dots, x_n \in \{1, 2, 3\}$  die Typen der  $n$  gekauften Lose. Berechnen Sie die Likelihood-Funktion als Funktion

$$L((p_1, p_2)) := L((p_1, p_2); x_1, \dots, x_n).$$