Sonderprüfungstermin zur Einführung in die Stochastik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Einführung in die Stochastik für BSc. Mathematik, Wirtschaftsmathematik, MCS, Economics
Stochastik für LaG Mathe PO 05
Aufbaumodul Stochastik für BSc. MCS
Analysis und Stochastik: (Teil II Stochastik) für LaG Mathe PO 98

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler

Herbst 2011
15. Juli 2010

Matrikelnummer ␣␣␣␣␣␣␣

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	max	Note
Bearbeitet (ankreuzen)	☐	☐	☐	☐	3 (2) /4 Aufgaben	
Punktzahl	10	10	10	10	30 (20)	
erreichte Punktzahl						

Hinweise:

- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. (Ausnahme: Fremdsprachenwörterbuch)
- Alle Resultate und **Zwischenschritte** sind zu **begründen**.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, bzw. 60 Minuten für Teilnehmende der Prüfung Analysis und Stochastik: (Teil II Stochastik) für LaG Mathe PO 98.
- Es sollen **drei** der vier bzw. bei Teilnehmenden der Prüfung Analysis und Stochastik: (Teil II Stochastik) für LaG Mathe PO 98 **zwei** der vier **Aufgaben bearbeitet** werden. Geben Sie an, welche Aufgaben gewertet werden sollen.

Aufgabe 1 **(2 + 3 + 3 + 2 Punkte)**

a) Der Boxplot in Abbildung 1 beschreibt die monatlichen Nettoeinkommen von 100 zufällig ausgewählten Alleinstehenden in Deutschland im Jahr 2002. Wie groß ist bei diesen Daten der Median und der Interquartilsabstand (wegen evt. Problemen beim genauen Ablesen genügt hier eine ungefähre Angabe der Größen)?

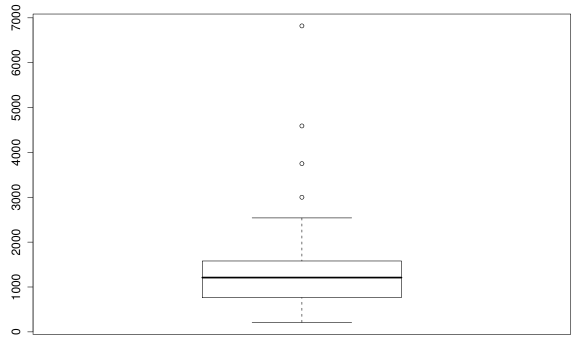

Abbildung 1: Nettoeinkommen Alleinstehender

b) Die Boxplots in den Abbildungen 2 beschreiben die monatlichen Nettoeinkommen von 100 zufällig ausgewählten alleinstehenden Männern (M) bzw. Frauen (F) in Deutschland im Jahr 2002. Vergleichen Sie anhand dieser Boxplots die Nettoeinkommen alleinstehender Männer mit denen von alleinstehenden Frauen.

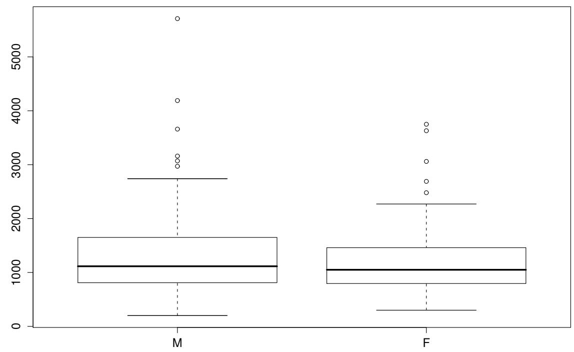

Abbildung 2: Nettoeinkommen von Männern (M) und Frauen (F)

c) Das Histogramm in Abbildung 3 beschreibt die Mietbelastungsquote (d.h. den Anteil der Nettomiete am Nettoeinkommen) von 100 zufällig ausgewählten Einwohnern Hessens im Jahr 2005. Wieviele dieser 100 Einwohner Hessens haben im Jahr 2005 zwischen 20 und 40 Prozent ihres Nettoeinkommens für die Miete ausgegeben? Wegen eventuellen Problemen beim Ablesen von Werten in dem unten stehenden Histogramm genügt hier wieder eine ungefähre Angabe dieses Wertes.

d) Das Streudiagramm in Abbildung 4 stellt das Alter und die Mietbelastungsquote von 100 zufällig ausgewählten Einwohnern Hessens im Jahr 2005 dar. Was können Sie über die Korrelation dieser Werte aussagen? Begründen Sie ihre Antwort.

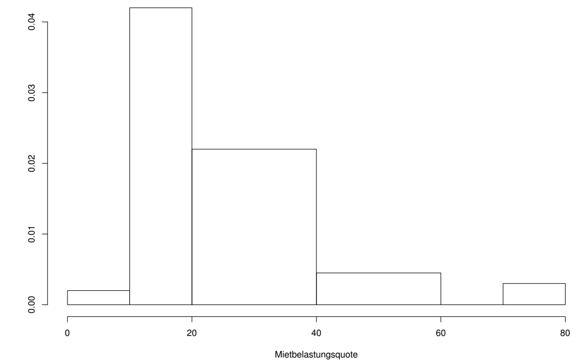

Abbildung 3: Mietbelastungsquote von 100 zufällig ausgewählten Einwohnern Hessens im Jahr 2005

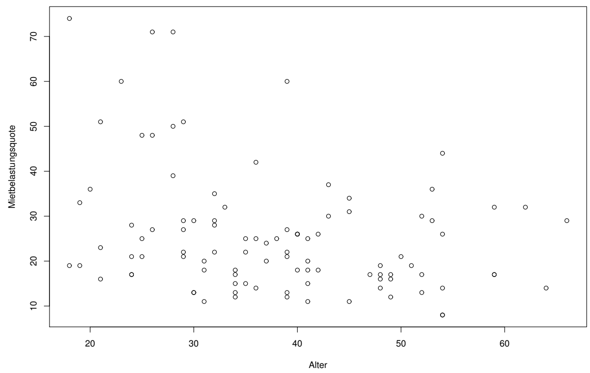

Abbildung 4: Alter und Mietbelastungsquote von 100 zufällig ausgewählten Einwohnern Hessens im Jahr 2005

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

An einem Flughafen wird für das Abstellen eines Autos für x Minuten die Gebühr

$$h(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 \leq x \leq 60 \\ \frac{x}{6} & \text{für } 60 < x < 600 \\ 800 & \text{für } x \geq 600 \end{cases}$$

verlangt. (Im Falle $x \geq 600$ wird das Auto abgeschleppt.)
Student S. holt seine Oma vom Flughafen ab. Dazu fährt er exakt zur geplanten Ankunftszeit des Flugzeugs in den Parkplatz ein. Leider hat das Flugzeug X Minuten Verspätung, wobei X eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist, d.h X hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Dabei erreicht er die Parkaufsicht, bei der er die Gebühr bezahlen muss, erst wieder nach $X + 30$ Minuten. Wie groß ist im Mittel die Gebühr, die Student S. bezahlen muss?
Hinweis: Berechnet werden soll

$$\mathbf{E}(h(X+30))$$

wobei X eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beweisen Sie den sogenannten Transformationssatz für Integrale, d.h. zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, so gilt:

$$\int_\Omega h(X(\omega))d\mathbf{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} h(x)d\mathbf{P}_X(x).$$

Hinweise: Zeigen Sie die Behauptung zunächst im Falle h nichtnegativ einfach, und begründen Sie dann, dass für $A \in \mathscr{B}$ und $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\mathbf{1}_A(X(\omega)) = \mathbf{1}_{X^{-1}(A)}(\omega).$$

Aufgabe 4 ((2+2) + (3+3) Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig, identisch $\mathscr{N}(a, \sigma_0^2)$-verteilt, d.h. $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig und identisch verteilt und X_1 hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Hierbei ist $a \in \mathbb{R}$ unbekannt und $\sigma_0 > 0$ gegeben und bekannt.

a)
1. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für a.
2. Ist der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

konsistent bzw. erwartungstreu für a? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ seien unabhängig identisch auf $\{0, 1 \ldots, \theta\}$ gleichverteilt, wobei $\theta \in \mathbb{N}_0$ unbekannt ist.

1. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.
2. Ist der Schätzer

$$\bar{T}_n(Y_1, \ldots, Y_n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$$

konstistent bzw. erwartungstreu für θ? Begründen Sie ihre Antwort.
Hinweis: Es gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$