Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09
10.03.09

Klausur „Einführung in die Stochastik“

Name: .... | Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... | Fachrichtung: ....

Aufgabe	1	2	3	4	max	Note
Bearbeitet (ankreuzen)	☐	☐	☐	☐	3/4 Aufgaben	
Punktzahl	10	10	10	10	30	
erreichte Punktzahl						

Zugelassene Hilfsmittel: Keine.

Verlangt und gewertet werden **drei der folgenden vier** Aufgaben.
Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.

1. Aufgabe (10 Punkte)

a) Eine Sozialerhebung des Deutschen Studentenwerks hat ergeben, dass in Deutschland 72 Prozent der Kinder aus vermögenden Familien aber nur 8 Prozent der Kinder aus einkommenschwachen Familien einen Studienabschluss erlangen. Kann man daraus schließen, dass ein kausaler Zusammenhang zwischen dem Einkommen der Eltern und dem Erlangen eines Studienabschlusses der Kinder besteht? Begründen Sie *kurz* ihre Antwort.

b) Erläutern Sie kurz die Begriffe <u>sampling bias</u> (Verzerrung durch Auswahl) und <u>non-response bias</u> (Verzerrung durch Nicht-Antworten).

2. Aufgabe (10 Punkte)

Die reelle Zufallsvariable X nehme die Werte 1, 2 und 3 mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2, 1/6 bzw. 1/3 an. Die Zufallsvariable Y sei stetig verteilt mit Dichte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} 12 \cdot x^2(1-x) & \text{für} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

X und Y seien unabhängig.

a) Bestimmen Sie $\mathbf{E}X$ und $V(X)$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{E}Y$ und $V(Y)$.

c) Bestimmen Sie $\mathbf{E}(X+Y)$ und $V(X+Y)$. An welcher Stelle benötigen Sie hier die Unabhängigkeit von X und Y ?

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) Beweisen Sie das erste Lemma von Borel-Cantelli

(Erstes Lemma von Borel und Cantelli)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(A_n)_n$ eine Folge von Ereignissen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) \le P(\cup_{k=N}^{\infty} A_k) \ \ (N \in \mathbb{N})$$

und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit rechts mit Hilfe der σ-Subadditivität ab.

b) Folgern Sie aus a): Sind $X, X_1, X_2, \ldots$ reelle Zufallsvariablen, definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so folgt aus

$$\forall \epsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P\left[|X_n - X| > \epsilon\right] < \infty,$$

das gilt:

$$X_n \to X \text{ f.s.}$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad 0 \le x \le 10, \\ \frac{1}{10} - \alpha & \text{für} \quad 10 < x \le 20, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > 20 \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Um den Parameter $\alpha \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ der Dichte von X zu schätzen, notiert sich Student S., dass Dozent K. bei den letzten $n = 5$ Vorlesungen

$$x_1 = 5 \text{ bzw. } x_2 = 12 \text{ bzw. } x_3 = 3 \text{ bzw. } x_4 = 7 \text{ bzw. } x_5 = 19$$

Minuten zu früh kam.

a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{5} f_\alpha(x_i), \quad (\alpha \in [0, \frac{1}{10}]).$$

b) Bestimmen Sie – ausgehend von den angegebenen Werten von $x_1, \ldots, x_5$ – die zugehörige Maximum-Likelihood-Schätzung von α.

c) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f_α. Zeigen Sie: Der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{10 \cdot n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[0,10]}(X_i)$$

mit

$$1_{[0,10]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le x \le 10, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > 10, \end{cases}$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer für α.

d) Ist der Schätzer in c) auch stark konsistent ? Begründen Sie ihre Antwort.