



Klausur

„Anal. u. Stoch. f. LaGM (PO 98), Teil 2: Stochastik
 Stochastik f. LaGM (PO 05)
 Praktische Mathematik, Aufbaumodul Stoch. f. BSc. MCS,
 Einf. i. d. Stoch. f. BSc. Mathe, WiMathe, MCS, Econ.“

Name: | Vorname:
 Matrikel-Nr.: | Studiengang:

Aufgabe	1	2	3	4	max	Note
Bearbeitet (ankreuzen)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3 (2) /4 Aufgaben	
Punktzahl	10	10	10	10	30 (20)	
erreichte Punktzahl						

Hinweise

1. Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen mit Ausnahme eines Fremdsprachenwörterbuchs.
2. Bei der Prüfung „Analysis und Stochastik für LaGM (PO 98)“ werden **zwei der folgenden vier Aufgaben** verlangt und gewertet. Für alle anderen im Titel genannten Prüfungen werden **drei der folgenden vier Aufgaben** verlangt und gewertet. Kreuzen Sie in obiger Tabelle an, welche Aufgaben gewertet werden sollen.
3. Bei der Prüfung „Analysis und Stochastik für LaGM (PO 98)“ beträgt die Prüfungsdauer 60 Minuten. Bei allen anderen im Titel genannten Prüfungen beträgt die Prüfungsdauer 90 Minuten.
4. Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.
5. Es ist eigenes Papier zu verwenden. Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Papierbogen. Jedes Blatt ist **vor der Verwendung** deutlich mit Name, Matrikelnummer und Aufgabennummer zu versehen. Beachten Sie, dass nicht beschriftete Blätter nicht gewertet werden müssen.
6. Füllen Sie bevor Sie mit der eigentlichen Bearbeitung der Klausur beginnen die obigen Felder sorgfältig aus. **Aus dem Eintrag im Feld Studiengang muss hervorgehen, an welcher Prüfung Sie teilnehmen.**
7. Legen Sie Studien- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

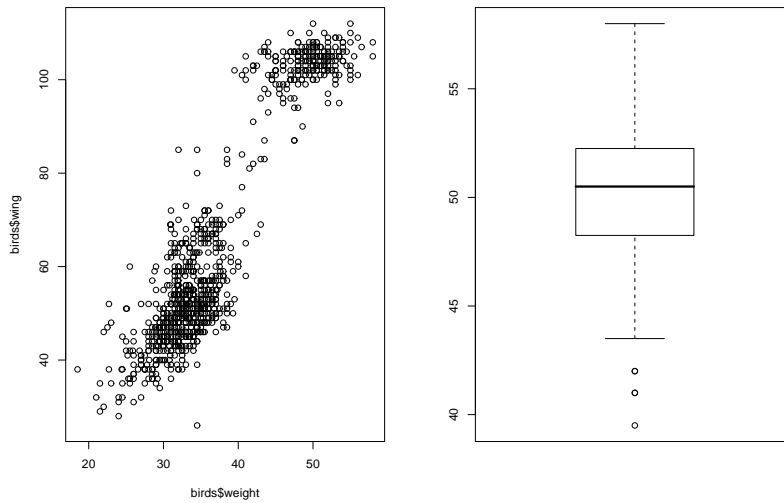


Abbildung 1

1. Aufgabe

(10 Punkte)

- (a) Geben Sie für jede der folgenden 6 Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. Pro richtiger Antwort erhalten Sie einen Punkt, pro falsche Antwort einen Punkt Abzug, negative Punkte bekommen Sie in Teil (a) insgesamt nicht. Falls Sie bei einer der Aussagen keine Angaben machen, erhalten Sie für diese Aussage keinen Abzug.
- i. Bei einer Umfrage befragt man deshalb nur einen Teil der Grundgesamtheit, weil nicht alle Befragten zur Auskunft bereit sind.
 - ii. Konfundierende Faktoren können bei prospektiv kontrollierten Studien ohne Randomisierung auftreten.
 - iii. Bei einer retrospektiv kontrollierten Studie wird die Studiengruppe mit Daten aus der Vergangenheit verglichen.
 - iv. Beobachtungsstudien dienen in erster Linie zum Aufstellen von Hypothesen. Auf kausale Zusammenhänge kann dabei nicht zurückgeschlossen werden.
 - v. Die Ergebnisse von Studien werden häufig durch den sogenannten sampling bias verzerrt.
 - vi. Konfundierende Faktoren können die Ergebnisse von Umfragen stark verfälschen.
- (b) i. Das Streudiagramm in Abbildung 1 beschreibt das Gewicht und die Flügelspannweite von 923 Amerikanischen Walddrosseln. Ist dabei die Flügelspannweite positiv oder negativ mit dem Gewicht korreliert? Begründen Sie ihre Antwort.

- ii. Der Boxplot in Abbildung 1 beschreibt das Gewicht von 139 ausgewachsenen Amerikanischen Walddrosseln. Wie groß ist der Median und der Interquartielabstand dieser Daten.

Hinweis: Wegen eventueller Probleme beim Ablesen genügt es, wenn Sie die Werte nur approximativ angeben.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Die reelle Zufallsvariable X nehme die Werte $-1, 0$ und 1 mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{6}, \frac{2}{3},$ bzw. $\frac{1}{6}$ an. Die Zufallsvariable Y sei stetig verteilt mit Dichte

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

X und Y seien unabhängig.

- Bestimmen Sie $\mathbf{E}X$ und $\mathbf{V}X$.
- Bestimmen Sie $\mathbf{E}Y$ und $\mathbf{V}Y$.
- Bestimmen Sie $\mathbf{E}(2 \cdot X + 3 \cdot Y)$ und $\mathbf{V}(X + Y)$. An welcher Stelle benötigen Sie hier die Unabhängigkeit von X und Y .

3. Aufgabe (10 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige reelle Zufallsvariablen definiert auf dem gleichen W-Raum mit

$$\mathbf{E}X_i = 0 \text{ und } 0 < \sigma_i^2 = \mathbf{V}(X_i) < \infty \quad (i = 1, \dots, n).$$

Setze

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\mathbf{P} \left[\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \epsilon \right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Hinweis:

$$\left[\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \epsilon \right] = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

wobei

$$A_k = [|S_1| \leq \epsilon, \dots, |S_{k-1}| \leq \epsilon, |S_k| > \epsilon].$$

Zeigen Sie:

$$\mathbf{E} [S_n^2] \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E} [S_n^2 \cdot 1_{A_k}]$$

und

$$\mathbf{E} [S_n^2 \cdot 1_{A_k}] = \mathbf{E} [S_k^2 \cdot 1_{A_k}] + \mathbf{E} [(S_n - S_k)^2 \cdot 1_{A_k}] \geq \epsilon^2 \cdot \mathbf{P}(A_k).$$

Wie folgt daraus die Behauptung?

4. Aufgabe

(10 Punkte)

- (a) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots seien unabhängig und identisch auf $[0, a]$ gleichverteilt. Geben Sie für jeden der Schätzer

$$T_{n,1}(X_1, \dots, X_n) = X_1 + X_2,$$

$$T_{n,2}(X_1, \dots, X_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$T_{n,3}(X_1, \dots, X_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \exp(X_i)$$

an, ob er erwartungstreu und / oder konsistenter Schätzer für a ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Bestimmen Sie den Maximum - Likelihood - Schätzer zum Schätzproblem in (a).
Hinweis: Eine Skizze der Likelihood - Funktion ist eventuell sehr hilfreich.