Analysis 2
14. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
11. Juli 2011

Präsenzaufgabe

Lösung 1 Quadratische Funktionen

Ganz links ist die Hessematrix in Null positiv definit. Wegen der rotationssymmetrie, hat sie sogar nur einen (positiven) Eigenwert, ist also ein positives Vielfaches der Einheitsmatrix. Die entsprechende quadratische Funktion ist also ein positives Vielfaches von $f(x, y) = x^2 + y^2$.

In der Mitte sieht man deutlich einen Sattel. Es gibt also einen positiven, und einen negativen Eigenwert der Hessematrix. Die Hauptachsen (maximale Krümmungen) sind die x-Achse mit positivem Eigenwert und die y-Achse mit negativem Eigenwert. Die Hessematrix ist also von der Form $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Die entspr. quadratische Funktion ist also von der Form $f(x, y) = \lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2$.

Ganz rechts sieht man, dass die Funktion von der y-Koordinate nicht abhängt. In x-Richtung ist die Fläche nach oben gekrümmt, der entspr. Eigenwert ist also positiv. Die Hessematrix ist damit ein positives Vielfaches von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die entspr. quadratische Funktion ist ein positives Vielfaches von $f(x, y) = x^2$.

Lösung 2 Taylor-Polynom

Die Funktion ist in in eine Taylor-Reihe entwickelbar mit

$$f(x, y, z) = xyz \sin(x + y + z) = xyz \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x + y + z)^{2n+1}$$

Für das Taylor-Polynom der Ordnung 4 müssen also nur die Terme der Ordnung $o(\left\|(x, y, z)^T\right\|^4)$ (oder höher) weggelassen werden: $(X := (x, y, z)^T)$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xyz \cdot \big((x + y + z) - o(\|X\|^3)\big) = xyz(x + y + z) + xyzo(\|X\|^3) \\ &= xyz(x + y + z) + o(\|X\|^4) \end{aligned}$$

Das gesuchte Taylor-Polynom ist also $T_4 f(x, y, z) = xzy(x + y + z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.

Lösung 3

Die Gleichung $\nabla f(x) = 0$ hat genau eine Lösung, nämlich

$$x_0 := \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} ,$$

also genau den Schwerpunkt von $a_1, \ldots, a_N$. Die Hessematrix an dieser Stelle ist $2N\,E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. Insbesondere ist die Hessematrix positiv definit. In x_0 liegt also ein lokales Minimum vor.

Man sieht leicht, dass für $\|x\| \to \infty$ auch $f(x) \to \infty$ gilt. Somit ist x_0 auch das globale Minimum.

Lösung 4 Drehinvarianz des Laplace-Operators

Betrachte die orthogonale Matrix $O := (v_1, \ldots, v_n)$ und die Funktion $g(x) := f(Ox)$. Die partiellen Ableitungen von g sind dann die entspr. Richtungsableitungen von f, genauer $\partial_i^k g(x) = \partial_{v_i}^n f(Ox)$ für alle $1 \leq i \leq n, k \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$\Delta g(O^T x) = \partial_{v_1}^2 f(x) + \cdots + \partial_{v_n}^2 f(x) . \tag{1}$$

Nach der Kettenregel ist die Hessematrix von $g = f \circ S_O$ durch $H_g(x) = O^T H_f(Ox) O$ gegeben. Wegen der Spureigenschaft folgt somit

$$\Delta g(O^T x) = \operatorname{Tr}\big(O^T H_f(OO^T x) O\big) = \operatorname{Tr}\big(OO^T H_f(x)\big) = \operatorname{Tr} H_f(x) = \Delta f(x) .$$

Zusammen mit Gleichung (1) folgt die Behauptung.

Lösung 5 Bifurkation

Rechne, rechne:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 2x + y e^{xy} , & \partial_2 f(x,y) &= 2\lambda y + x e^{xy} , \\ \partial_1^2 f(x,y) &= 2 + y^2 e^{xy} , & \partial_2^2 f(x,y) &= 2\lambda + x^2 e^{xy} , \\ \partial_1 \partial_2 f(x,y) &= \partial_2 \partial_1 f(x,y) = (1 + xy) e^{xy} . \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $(0,0)^T$ ein kritischer Punkt ist. Durch Betrachten der Hessematrix sieht man, dass dort für $\lambda > 1/4$ ein Minimum und für $0 < \lambda < 1/4$ ein Sattelpunkt vorliegt. Für $\lambda = 1/4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{xy} + x^2 + (\tfrac{1}{2}y)^2 = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 + (e^{xy} - xy) \\ &= 1 + (x + \tfrac{1}{2}y)^2 + (e^{xy} - xy - 1) > 1 + (x + \tfrac{1}{2}y)^2 \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $xy \neq 0$ ($e^t > 1 + t$ für alle $0 \neq t$). Für $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gilt deshalb $f(x,y) > 1 = f(0,0)$. Für $\lambda = 1/4$ nimmt f an der Stelle $(0,0)^T$ also das globale Minimum an.

Die Funktion f ist in Abhängigkeit von λ monoton wachsend. Somit gilt auch für $\lambda \geq 1/4$ die Abschätzung $f(x,y) > 1 = f(0,0)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Das heißt, f hat auch für $\lambda \geq 1/4$ an der Stelle $(0,0)^T$ ein globales Minimum.

Bei der Suche nach weiteren kritischen Punkten stellt man zunächst fest, dass aus $\nabla f(x,y) = 0$ folgt $xye^{xy} = -2x^2 = -2\lambda y^2$, also $x = -\mu y$ mit $\mu = \sqrt{\lambda}$ (das positive Vorzeichen scheidet offenbar aus). Als Bedingung für $\frac{\partial f}{\partial x}$ ergibt sich

$$e^{-\mu y^2} = 2\mu.$$

Diese Gleichung hat nur dann Lösungen $y \neq 0$, wenn $\mu < \frac{1}{2}$ ist. Die positive Lösung

$$y_0 = \sqrt{-(\ln 2\mu)/\mu}$$

führt, zusammen mit dem zugehörigen Wert $x_0 = -\mu x_0$, auf zwei im zweiten und vierten Quadranten gelegene Punkte $\pm(x_0, y_0)$. Weitere stationäre Punkte sind nicht vorhanden. Da f in der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_r(0)$ ein Minimum besitzt, andererseits für große Werte von r auf dem Rand von $B_r(0)$ sicher > 1 ist, muß es sich um Minimalstellen handeln (f ist symmetrisch zum Nullpunkt). Auf dasselbe Ergebniss führt die Berechnung der Determinate: Setzt man in die zweiten Ableitungen den Wert $e^{x_0 y_0} = 2\mu$ ein, so erhält man $\det(H_{(x_0,y_0)}(f)) = 16\lambda\mu y_0^2 > 0$.

Fassen wir zusammen: Für $\lambda \geq \frac{1}{4}$ wird das globale Minimum im Nullpunkt, für $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ in den beiden Punkten $\pm(-\sqrt{\lambda}y_0, y_0)$ mit $y_0^2 = -(\ln(2\sqrt{\lambda}))/\sqrt{\lambda}$ angenommen, während der Nullpunkt ein Sattelpunkt ist. Das Minimum hat den Wert 1 bzw. $2\sqrt{\lambda}(1 - \ln(2\sqrt{\lambda}))$. Es gibt keine weiteren lokalen Extrema.

Das hier beobachtete Verhalten tritt bei vielen nichtlinearen Problemen auf, die von einem Parameter λ abhängen. Eine gewisse, von λ abhängige Größe (hier die Minimalstelle) ist zunächst (hier für $\lambda > \frac{1}{4}$) eindeutig bestimmt, spaltet sich aber, wenn man einen Grenzpunkt λ_0 (hier $\frac{1}{4}$) überschreitet, in zwei oder mehrere Lösungen auf. Das Phänomen wird Bifurkation *oder* Verzweigung, *der Punkt λ_0* Verzweigungs- *oder* Bifurkationspunkt *genannt.*