Analysis 2
13. Übung
MuLo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
4. Juli 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Tangentialhyperebene

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := (x \cdot y)^{\frac{1}{3}}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialhyperebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ im Punkt $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Die Funktion ist im Punkt v differenzierbar und es gilt $f(v) = 1$. Das Differential ist gegeben durch

$$D(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{2}{3}}\right),$$

sofern es existiert. Damit erhalten wir

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \frac{1}{3}(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ E(x,y) \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung der Ebene.

Aufgabe 2 Eine Verallgemeinerte Produktregel

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir definieren die Funktion $f \cdot g$ über das punktweise Produkt:

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f \cdot g$ ebenfalls ein Element von $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ist und beweisen Sie die Produktregel:

$$D(f \cdot g) = f \cdot Dg + g \cdot Df.$$

Hierbei bedeutet natürlich $f \cdot Dg$, dass für jedes $x \in \Omega$ der Zeilenvektor $Dg(x)$ mit der Zahl $f(x)$ multipliziert wird.

Bemerkung: Beweisen Sie dies durch geschickte Verkettung mit der Funktion $m(x,y) := x \cdot y$

und mit Anwendung der Kettenregel.
Lösung: Die Funktion m ist bilinear. Daher ist ihr Differential gegeben durch $Dm(x,y)=(y,x)$. Definieren wir $n(x) := \begin{pmatrix} df(x) \\ dg(x) \end{pmatrix}$, so erhalten wir $f\cdot g(x) = m(n(x))$, also

$$\begin{aligned} d(fg)(x) &= d(m\circ n)(x) = dm(n(x))\cdot dn(x) \\ &= (g(x), f(x))\cdot \begin{pmatrix} df(x) \\ dg(x) \end{pmatrix} \\ &= g(x)df(x) + f(x)dg(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Divergenz, Rotation und Gradient

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Wir definieren *Divergenz* und *Rotation* des Vektorfeldes F:

$$\operatorname{div}(F) := \sum_{k=1}^{3} \partial_k F_k,$$

$$\operatorname{rot}(F) := \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $f \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ eine Funktion.

(a) Wir betrachten das lineare Vektorfeld

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Divergenz und Rotation dieses Feldes.

(b) Zeigen Sie, dass für die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes folgender Zusammenhang zur Jakobi Matrix J_F besteht:

$$\operatorname{div}(F)(x,y,z) = \operatorname{Tr}(J_F(x,y,z)).$$

$$\operatorname{rot}(F)(x_0,y_0,z_0) \times \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \left(J_F(x_0,y_0,z_0) - J_F(x_0,y_0,z_0)^T\right) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei $F = \nabla f$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld F *rotationsfrei* ist, also $\operatorname{rot}(F) = 0$ gilt.

(d) Sei $G = \operatorname{rot}(F)$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld G *quellenfrei* ist, also $\operatorname{div}(G) = 0$ gilt.

Die geometrische Bedeutung der Größen Rotation und Divergenz werden Ihnen, falls Sie keine Physik studieren, später im Studium deutlicher, sobald Sie sich mit mehrdimensionalen Integrationsbegriffen beschäftigen. Zum Studium der Geometrie von Ω sind die Begriffe Rotation und Divergenz ebenfalls nützlich.
Lösung: Nachrechnen.

Aufgabe 4 Eindimensionales Differenzieren

Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) := \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

Ist diese Funktion differenzierbar und wenn ja, was ist Ihre Ableitung?

Lösung: Wir Definieren $\Phi(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt$. Dann gilt: $F(x) = \Phi(x^2)$. Da Φ nach dem Hauptsatz differenzierbar ist und Ableitung e^{-x^2} besitzt, erhalten wir mit der eindimensionalen Kettenregel:

$$F'(x) = \Phi'(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot e^{-x^4}.$$

Hausübungen

Aufgabe 1 Richtungsableitungen

(a) Betrachten Sie folgende Funktionen und Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ mit $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $f(x,y,z) = z^2 + ze^y$ mit $\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass in beiden Fällen die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung v im Punkt ξ_0 existiert und berechnen Sie diese. Normieren Sie ggf. den Richtungsvektor v.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *radialsymmetrisch*, d.h es gebe eine Funktion $f_r :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f_r(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\nabla f(x) = f_r'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|},$$

sofern alle beteiligten Funktionen differenzierbar in x, bzw. $\|x\|$ sind.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar und *homogen vom Grad* $p > 0$, d. h. es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$: $f(\alpha x) = \alpha^p f(x)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = p \cdot f(x).$$

1 **Lösung:**

(a) Es kommt raus: (i) $2\sqrt{2}$ und (ii) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Da wir die Ableitung der euklidischen Norm kennen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} df(x) &= (\partial_1(f_r \circ \|\cdot\|)(x), \ldots, \partial_n(f_r \circ \|\cdot\|)(x) \\ &= \frac{1}{2} f_r'(\|x\|) \cdot \left(\frac{2x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{2x_n}{\|x\|} \right) \\ &= f_r'(\|x\|) \cdot \frac{x^T}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Transponieren liefert die Aussage.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x), x \rangle &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tx) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f((1+t)x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(1-t)^p f(x) - f(x)}{t} \\ &= f(x) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{(1-t)^p - 1}{t} = p \cdot f(x). \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe: Differenzieren unterm Integral und der Satz von Fubini

In dieser Aufgabe stellen wir einige Werkzeuge bereit, die Sie für das Studium der Faltung brauchen können.
Wir betrachten das nicht leere Rechteck $\Omega := [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$. Weiter sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $F(x) := \int_c^d f(x,t)dt$ ist stetig.

(b) Ist f zusätzlich im inneren von Ω stetig partiell nach x_1 differenzierbar, so ist die Funktion F stetig differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,t)dt.$$

(c) Die Funktion F ist integrierbar und es gilt

$$\int_a^b F(x)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Hinweis: Wenden Sie in (b) einen Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf einen Differenenquotienten von F an. Hierfür benötigen Sie die Voraussetzungen an f_x. Diskutieren Sie dann, dass die Zwischenstelle zwar von der anderen Variablen abhängig ist, dies jedoch für den Grenzübergang keine Rolle spielt. Für (c) verwenden Sie geschickt (b) und den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.
Bemerkung: Die Aussage in (c) heißt auch *Satz von Fubini* für stetige Funktionen. Je nach Integralbegriff ist bei den Voraussetzungen deutlich weniger als stetig erforderlich. Dies lernen Sie in Analysis 4.
Lösung: (a) Da f auf Ω gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $|x - x_0| \leq \delta$ folgt, dass $|f(x,y) - f(x_0,y)| \leq \epsilon$ für alle y.
Also gilt

$$|F(x) - F(x_0)| = \leq \int_c^d |f(x,y) - f(x_0,y)|dy \leq \epsilon(d-c).$$

Daraus folgt, dass F stetig ist.
(b) ist f_x stetig, so folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \int_c^d \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} dy = \int_c^d f_x(\xi,y)dy.$$

Hierbei hängt das ξ von y ab und liegt zwischen x und $x+h$. Die rechte Seite ist aber in ξ stetig nach (a), also gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \lim_{h \to 0} \int_c^d f_x(\xi,y)dy = \int_c^d f_x(x,y)dy.$$

Das war zu zeigen.
(c) Wir setzen $H(x) := \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)dt\right) dy$. Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen von (b). Also gilt

$$H'(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Wir erhalten

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_a^b H'(x)dx = H(b) - H(a) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Referenz: Meyberg Vachenauer, Höhere Mathematik I, Springer Verlag, p. 430f.

Aufgabe 2 Eine interessante Funtkion

Wir betrachten folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & : x \in]-1,1[\\ 0 & : x \notin]-1,1[\end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist. Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung: Wir wissen, dass $e^{-\frac{1}{x^2}}$ in 0 beliebig oft differenzierbar ist und jede Ableitung im Punkt 0 den Wert 0 besitzt. Der Rest ist Zusammensetzen.

Aufgabe 3 Die Faltung

Sie dürfen die Resultate der vorigen Aufgaben verwenden, um diese Aufgabe zu bearbeiten, auch wenn Sie diese (noch) nicht bearbeitet haben.
Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir den *Träger von* f durch $T_f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$. Dies ist also der Abschluß der Punkte, an welchen die Funktion nicht verschwindet. Die Menge aller Funktionen, welche stetig sind und deren Träger kompakt ist, bezeichnen wir mit $\mathscr{C}_C(\mathbb{R})$. Ein Beispiel für eine interessante Funktion mit kompaktem Träger haben Sie in der vorangegangenen Aufgabe gesehen. Weiter setzen wir $\mathscr{C}_C^n(\mathbb{R}) := \mathscr{C}_C(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$. Dies sind also die kompakt getragenen und n-fach stetig differenzierbaren Funktionen. (Warum sind deren Ableitungen wieder kompakt getragen?)
Es seien $f, g \in \mathscr{C}_C(\mathbb{R})$ Funktionen. Wir definieren die *Faltung* $f * g$ dieser Funktionen durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Faltung:

(a) Für den Träger von $f * g$ gilt: $T_{f*g} \subseteq T_f + T_g := \{a + b :\ a \in T_f,\ b \in T_g\}$

(b) Die Funktion $f * g$ ist integrierbar und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$.

(c) Wir erinnern an die Integralnorm $\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ einer stetigen integrierbaren Funktkion f. Es gilt:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

(d) Die Faltung ist kommutativ.

(e) Ist $f \in \mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$, so ist auch $f * g \in \mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$ und es gilt

$$(f * g)^{(n)} = f^{(n)} * g.$$

Beobachtung: Die Menge $\mathscr{C}_C(\mathbb{R})$ ist also mit $*$ eine normierte kommutative Algebra und jede der Mengen $\mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$ ein Faltungsideal.

(f*) Hat die Algebra $(\mathscr{C}_C(\mathbb{R}), *)$ eine Eins?

Lösung:

(a) Ist $x \neq T_f + T_g$, so folgt aus $(f * g)(x) = \int_{-\infty} \infty f(y)g(x-y)dy$, dass entweder $f(y) = 0$ gilt oder $f(x-y) = 0$ gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$. Denn wären beide Faktoren im Integral für ein y ungleich 0, so wäre $y \in T_f$ und $(x-y) \in T_g$, also $y + (x-y) = x \in T_{f+g}$.

(b) Die Funktion $f * g$ hat kompakten Träger und ist stetig, denn $T_f + T_g$ ist beschränkt. Damit ist sie integrierbar.
Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f * g(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dtdx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dxdt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)dxdt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt.\end{aligned}$$

(c) Folgt aus (b), da $|f * g| \leq |f| * |g|$ gilt.

(d) Wir substituieren $y \to x - y$ und es ergibt sich:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = (g * f)(x).$$

(e) Sei f differenzierbar. Dann ist die Funtkion

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

nach x differenzierbar nach der Zusatzaufgabe. Es ergibt sich

$$(f * g)'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\Big(f(x-t)g(t)\Big)dt = (f' * g)(x).$$

Der Rest ist Induktion.

(f) Nein, sonst gäbe es die Delta „Funktion“ δ mit $\int f(t)\delta(t)dt = f(0)$ für alle stetigen Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, was wir bereits in einer Hausübung ausgeschlossen haben.
Ein solches Objekt δ gibt es nicht als Funktion, nur als Maß oder Distribution.