Analysis 2
12. Übung
Lösungshinweise

Prof. Dr. B. K"ummerer
W. Reu"swig, K. Schwieger

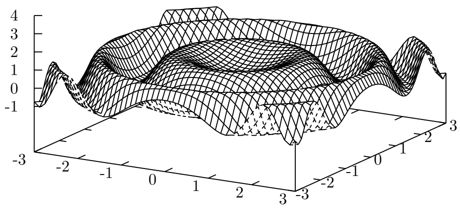
Fachbereich Mathematik
27. Juni 2011

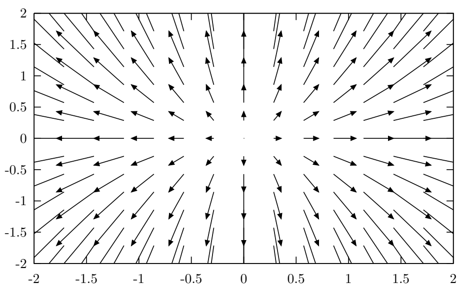
Präsenzaufgabe

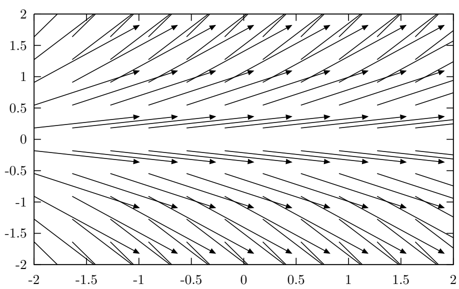
Aufgabe 1

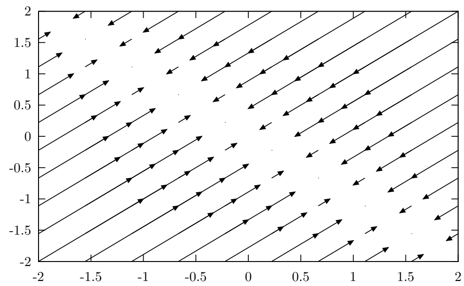
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist auf $f(x) := 1/x^2$ nicht anwendbar.

Aufgabe 2 Veranschaulichung von Funktionen


a)


b)


c)


d)

e) Jede Niveauflaeche $x + y + z = c$ zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ liefert eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit $(1,1,1)^T$ als Normalenvektor.

f) Wählt man z.B. Polarkoordinaten als Koordinatensystem, so wird jeweils der Kreis mit Radius r in den Kreis mit Radiums $1/r$ abgebildet. Ein Kreissegment $\{r \cdot e^{it} : \alpha \leq t \leq \beta\}$ wird in das entsprechende komplex konjugierte Kreissegment $\{1/r \cdot e^{-it} : \alpha \leq t \leq \beta\}$ abgebildet.

Aufgabe 3 Kettenregel für partielle Ableitungen

Kettenregel hinschreiben und alles steht da.

Aufgabe 4

In allen Punkten außer dem Nullpunkt ist f differenzierbar. Mit der Abschätzung

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{y}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right| \leq |y|$$

zeigt man leicht die Stetigkeit von f im Punkt $(0,0)^T$. Auf den Koordinatenachsen ist f konstant Null. Insbes. ist f partiell differenzierbar in $(0,0)^T$. Wäre f differenziebar in $(0,0)$, so würden damit auch alle Richtungsableitungen in $(0,0)^T$ verschwinden. In Richtung $v := (1,1)^T$ z.B. gilt allerdings

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{(t^2+t^2)t} = \frac{1}{2} .$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1

a) Genau für $\alpha > -1$ existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}$. Genau für $\alpha < -1$ existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^\alpha \, dx = -\frac{1}{\alpha+1}$.

b) Mit der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} =]-\pi/2, \pi/2[$ der Tangensfunktion gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan a)\\ &= \pi/2 - (-\pi/2) = \pi .\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Wichtige Ableitungen

a) Die Funktion ist bilinear und nach dem Tutorium damit differenzierbar mit Ableitung $df(x,y)(h_x,h_y) = xh_y + h_x y$, also mit Jacobimatrix $J_f(x,y) = (y,x)$.

b) Die Funktion ist linear, ist also an jedem Punkt ihre eigenen Ableitung $df(x)(h) = f(h) = h_1 + \cdots + h_n$ und Jacobimatrix $J_f(x) = (1,1,\ldots,1)$.

c) Die Funktion $g : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ist eine quadratische Form mit $g(x) = x^T x = x^T E x$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Ableitung ist damit gegeben durch $dg(x)(h) = h^T E x + x^T E h = 2x^T h$.

   Die Funktion f in der Aufgabe ist dann eine Komposition von g mit der auf $]0,\infty[$ (stetig) differenzierbaren Wurzelfunktion $t \mapsto \sqrt{t}$. Die Ableitung von f ist also

$$df(x)(h) = \frac{-1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot dg(x) = \frac{x^T}{\|x\|} \cdot h .$$

d) Die Funktion f ist differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen. Die Jacobimatrix lässt sich leicht über die partiellen Ableitungen bestimmen:

$$J_f(r,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\sin(\beta) & r\cos(\alpha)\sin(\beta) & r\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) & -r\sin(\alpha)\sin(\beta) & r\cos(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\beta) & 0 & -r\sin(\beta) \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3 Parametrisierung von $\mathbb{S}^2$

b) Man sieht sofort, dass T affin linear ist, also tatsächlich eine Ebene parametrisiert. Trivialerweise ($h = 0$) enthält die Ebenen den Punkt $f(\alpha_0, \beta_0)$. Die Spalten $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ von $df(\alpha_0, \beta_0)$ sind die Richtungsvektoren der Ebene. Nachrechnen liefert, dass $f(\alpha_0, \beta_0)$ senkrecht auf v_1, v_2 steht, also $df(\alpha_0, \beta_0)$ ein Normalenvektor ist.

c) $\tilde{\gamma}'(t_0) = df(\gamma'(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$.

Aufgabe 4 Die Gammafunktion

a) Für $\alpha \leq 0$ gilt $e^{-t}t^{\alpha-1} \geq \frac{1}{e}t^{\alpha-1}$ für alle $0 \leq t \leq 1$. Weil das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt$ nicht existiert, existiert auch das Integral $\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt$ nicht.

Für $\alpha > 0$ gilt hingegen $e^{-t}t^{\alpha-1} \leq t^{\alpha-1}$ für alle $0 \leq t \leq 1$. Das uneigentliche Integral $\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt$ existiert also nach dem Majorantenkriterium. Für $t \in [1,\infty[$ gilt $e^{-t}t^{\alpha-1} \leq t^{-2}$. Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty e^{-t}t^2\,dx$ existiert also auch nach dem Majorantenkriterium.

b) Einmal partiell integrieren und schon steht die erste Gleichung da. Der Wert $\Gamma(1) = 1$ ist schnell berechnet und Induktion liefert dann die zweite Gleichung.