Analysis 2
11. Übung
MuLo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
20. Juni 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Homotopie

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt. Ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, also ein geschlossener Weg mit Start- und Endpunkt $x_0 \in X$, heißt auch eine *Schlaufe* und der Punkt x_0 heißt der *Basispunkt der Schlaufe*.
Um die Notation zu vereinfachen, lassen wir die explizite Erwähnung des Basispunkts im Folgenden weg: Es ist immer der am Anfang gewählte Punkt x_0 der Basispunkt.
Wir nennen zwei Schlaufen γ_0 und γ_1 *homotop*, falls es eine Familie von Schlaufen $(f_s)_{s\in[0,1]}$ gibt, so dass folgendes gilt:

- $f_0(t) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0,1]$.
- $f_1(t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$.
- Die Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X,\ H(s,t) := f_s(t)$ ist stetig.

Diese Abbildung H heißt auch *Homotopie*. Eine Homotopie führt also anschaulich eine Schlaufe stetig in eine andere Schlaufe über.
Sind γ_0 und γ_1 homotop, so schreiben wir $\gamma_0 \simeq \gamma_1$. Um auszudrücken, dass H eine Homotopie von γ_0 und γ_1 ist, schreiben wir auch $H : \gamma_0 \simeq \gamma_1$.
In den Hausübungen werden wir zeigen, dass Homotopie auf den Schlaufen eine Äquivalenzrelation definiert.

(a) Sei $X = \mathbb{C}$ und $x_0 = 0$. Finden Sie eine Homotopie zwischen den Wegen $\epsilon : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\epsilon(t) := 0$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \left(e^{2i\pi\cdot t} - 1\right)$.

(b) Sei $X = [-1,1]$, $x_0 = 0$ und $\epsilon(t) := 0$ für alle $t \in [0,1]$. Weiter sei γ eine beliebige Schlaufe in X. Zeigen Sie, dass ϵ und γ homotop sind.

Lösung:

Da die Gebiete konvex sind, ist es leicht, eine Homotopie explizit hinzuschreiben:

(a) $H(s,t) := s \cdot \left(e^{2i\pi\cdot t} - 1\right)$.

(b) $H(s,t) := s \cdot \gamma(t)$.

Es gibt natürlich beliebig viele andere Homotopien.

Aufgabe 2 Pinocchios Nasenspitze

Pinocchio gehe den Weg

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dabei läuft er derart, dass seine Nasenspitze immer in tangentialer Richtung zu seiner Bewegung nach vorne zeigt. Da er Geppetto aus einer großen deutschen Tageszeitung vorliest, verändert sich möglicherweise die Länge seiner Nase $n(t)$. Bestimmen Sie den Weg seiner Nasenspitze.

Lösung:

Pinoccios Nasenspitze zeigt in die Richtung des Geschwindigkeitsvektors des Weges, also in Richtung

$$\gamma'(t) := \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Position seiner Nasenspitze ist zum Zeitpunkt t natürlich $n(t)$ weit in Richtung des Geschwindigkeitsvektors von Pinnocchios Kopf entfernt, also ist der Weg seiner Nasenspitze gegeben durch

$$\text{Nase}(t) := n(t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 3 Lissajous Kurven

Eine *Lissajous Kurve* ist ein Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \\ a_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi) \end{pmatrix}$$

für Zahlen $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \varphi \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie für die Lissajous Kurve γ zu $a_1 = a_2 = 1$, $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{6}$ die Schnittpunkte des Weges γ mit den Achsen und die Punkte mit waagerechter oder senkrechter Tangente. Skizzieren Sie grob die Kurve.

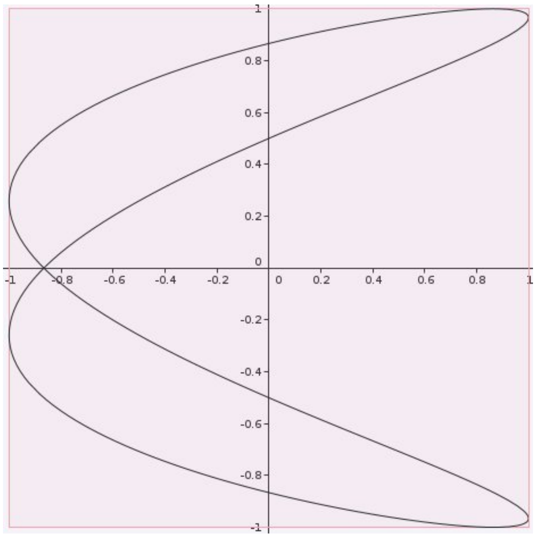
(b) Warum ist der Weg γ aus (a) ein periodischer Weg, dass heisst warum existiert eine Zahl $P \in]0, \infty[$ mit $\gamma(t) = \gamma(t + P)$ für alle $t \in \mathbb{R}$?

(c) Welche Bedingungen müssen im Allgemeinen für $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \varphi$ gelten, damit eine Lissajous Kurve γ ein periodischer Weg ist?

Bemerkung: Die Zahlen a_1, a_2 heißen *Amplituden*, die Zahlen ω_1, ω_2 heißen *Kreisfrequenzen* und die Zahl φ heißt *Phasenverschiebung* der Lissajous Kurve γ.

Lösung:

Zur Veranschaulichung die Spur der Lissajous Kurve mit den Daten aus Aufgabenteil (a).



(a) Die Schnittpunkte mit der y-Achse:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser ist ein Kreuzungspunkt der Kurve. Die Ableitung des Weges ist gegeben durch

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}.$$

Es ergeben sich als Punkte mit waagerechtem Geschwindigkeitsvektor:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es ergeben sich als Punkte mit senkrechtem Geschwindigkeitsvektor:

$$\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

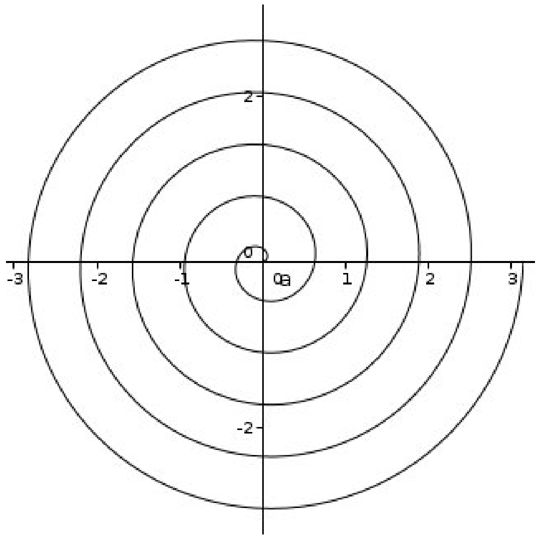
$$\gamma(t+\alpha) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \omega_1 \cdot \alpha) \\ a_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi + \omega_2 \cdot \alpha) \end{pmatrix}.$$

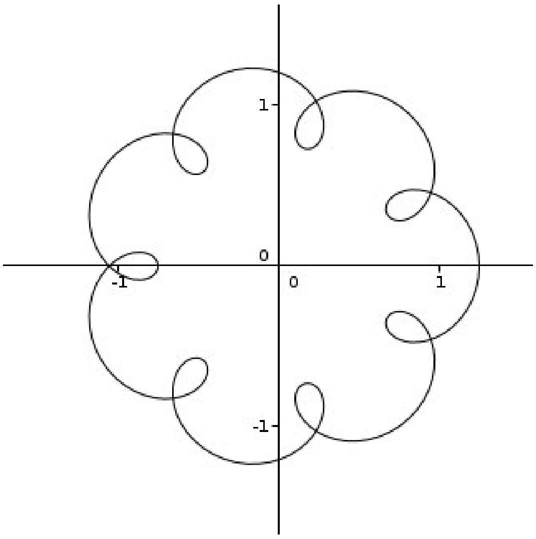
Da der Sinus 2π periodisch ist, folgt mit den Eingangsdaten, dass α ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein muß. Damit ist die Kurve ebenfalls 2π periodisch.

(c) Der Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ muß rational sein, damit die Kurve periodisch verläuft.

Aufgabe 4 Der Weg zur Bahn

Betrachten Sie folgende Kurven. Dies seien Bahnen von Wegen. Bestimmen Sie einen analytischen Ausdruck für Wege, welche die angegebenen Bahnen möglichst gut wiedergeben.





Lösung:

Die erste Bahn wird durch folgenden Weg realisiert:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{4}\cos(8t) \\ \sin(t) + \frac{1}{4}\sin(8t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos(8t) \\ \sin(8t) \end{pmatrix}.$$

Die zweite Bahn wird durch folgenden Weg realisiert:

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{10} t \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

Aufgabe 1 Produktregeln für Ableitungen von Wegen

Es sei $I := [0,1]$ und es seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbare Wege. Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

(a) $\frac{d}{dt}\left\langle \gamma_1(t), \gamma_2(t) \right\rangle = \left\langle \gamma_1'(t), \gamma_2(t) \right\rangle + \left\langle \gamma_1(t), \gamma_2'(t) \right\rangle$.

(b) Ist $n = 3$, so gilt $\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)\right) = \gamma_1'(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \gamma_2'(t)$.

Lösung:

Komponentenweise wende eindimensionale Produkt- bzw. Kettenregel an. Dann ist das sehr leichtes Nachrechnen.

Aufgabe 2 Taylor Restglied

Aus der Vorlesung kennen Sie die Restgliedformel von Lagrange für Taylorpolynome. In dieser Aufgabe wollen wir eine andere Darstellung des Restgliedes beweisen.
Es sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und T_n das Taylorpolyom von f in einen Entwicklungspunkt $x_0 \in]a,b[$. Zeigen Sie: Für jedes $x \in]a,b[$ gilt

$$f(x) = T_n(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt \,.$$

Hinweis: Vollständige Induktion könnte nützlich sein.

Lösung:

Wir zeigen die Aussage für $n = 0$:

$$\begin{aligned} T_0(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(1)}(t)}{0!}(x-t)^0 \, dt &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) \, dt \\ &= f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x). \end{aligned}$$

Dies ist also nichts anderes als der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
Sei für ein $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = T_n(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt \,.$$

Wir betrachten

$$T_{n+1}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} \, dt \,.$$

Das Integral formen wir mit Hilfe von partieller Integration um. Wähle $u(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ und wähle $v'(t) = f^{(n+2)}(t)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) \quad &+ \quad \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt \\
&= \quad T_{n+1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n}\,dt \\
&= \quad T_{n+1}(x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n} \\
&= \quad T_n(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n} = f(x).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Induktionsvoraussetzung in der letzten Umformung verwendet. Also folgt mit Hilfe von vollständiger Induktion die Aussage.

Aufgabe 3 Homotopie ist eine Äquivalenzrelation

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ der Basispunkt. Im folgenden seien γ, γ_0, γ_1 und γ_2 Schlaufen im Sinn der Anwesenheitsübung.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\simeq$ reflexiv ist, indem Sie eine konkrete Homotopie $H : \gamma \simeq \gamma$ angeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\simeq$ symmetrisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Relation $\simeq$ transitiv ist, indem Sie zu Homotopien $H_0 : \gamma_0 \simeq \gamma_1$ und $H_1 : \gamma_1 \simeq \gamma_2$ eine Homotopie $H : \gamma_0 \simeq \gamma_2$ konstruieren.

Für die Äquivalenzklasse von γ schreiben wir wie gewohnt $[\gamma]$. Diese beinhaltet alle zu γ homotopen Schlaufen.

(d) Sei $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ und γ eine beliebige Schlaufe. Zeigen Sie, dass dann $\gamma \simeq \gamma \circ \varphi$ gilt.

Hinweis: Teilaufgabe (d) kann ungemein hilfreich in der Zusatzaufgabe sein.

Lösung:

(a) Eine mögliche Homotopie ist $H(s,t) := \gamma(t)$. Diese hat die gewünschten Eigenschaften.

(b) Ist $H : \gamma_1 \simeq \gamma_2$, so ist, da die Funktion $\varphi(s) := 1 - s$ auf $[0,1]$ stetig ist, auch die Funktion $K(s,t) := H(\varphi(s), t)$ stetig. Die anderen Eigenschaften einer Homotopie sind durch die Voraussetzungen an H erfüllt, also gilt $K : \gamma_2 \simeq \gamma_1$.

(c) Hier müssen wir etwas puzzlen. Nach Voraussetzungen sind folgende Funktionen auf ihrem Definitionsgebiet stetig:

$$A : [0, 0.5] \times [0,1] \to X,\ A(s,t) := H_0(2s, t),$$

$$B : [0.5, 1] \times [0, 1] \to X, \; B(s, t) := H_1(2s - 1, t).$$

Da $A(0.5, t) = B(0.5, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt, ist die Funktion

$$H(s, t) := \begin{cases} A(s, t) & 0 \leq s \leq 0.5 \\ B(s, t) & 0.5 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

auf ganz $[0, 1] \times [0, 1]$ stetig, es gilt $H(s, 0) = H(s, 1) = x_0$ für alle $s \in [0, 1]$, es gilt $H(0, t) = \gamma_0(t)$ und es gilt $H(1, t) = \gamma_2(t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Damit ist die „aus A und B zusammengeklebte" Funktion H eine Homotopie $H : \gamma_0 \simeq \gamma_2$.

Homotopie definiert also auf den Schlaufen eine Äquivalenzrelation.

(d) Hilfreich hier ist, dass das Intervall $I = [0, 1]$ konvex ist. Daher ist für jedes $s \in [0, 1]$ und $t \in [0, 1]$ auch der Punkt $s \cdot t + (1 - s) \cdot \varphi(t) \in [0, 1]$. Daraus schlagen wir Kapital und definieren

$$H(s, t) := \gamma(s \cdot t + (1 - s) \cdot \varphi(t)).$$

Dadurch, dass $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ gilt, erhalten wir

$$H(s, 0) = \gamma(s \cdot 0 + (1 - s) \cdot \varphi(0)) = \gamma(0),$$

$$H(s, 1) = \gamma(s \cdot 1 + (1 - s) \cdot \varphi(1)) = \gamma(1).$$

Weiter erhalten wir

$$H(0, t) = \gamma(\varphi(t)), \quad H(1, t) = \gamma(t).$$

Es gilt also $H : \gamma \circ \varphi \simeq \gamma$.

Zusatzaufgabe: Die Fundamentalgruppe

In dieser Aufgabe wollen wir das Konzept der Homotopie verwenden, um zu einem metrischen Raum (X, d) zum Basispunkt $x_0 \in X$ eine Gruppe zu assoziieren. Deshalb betrachten wir folgende Operationen auf den Schlaufen: Sind γ, γ_1 und γ_2 solche Schlaufen, so setze

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Weiter setze

$$\gamma^-(t) := \gamma(1 - t).$$

Es ist also $\gamma_1 * \gamma_2$ bis auf Reskalierung nichts anderes, als nach dem Durchlauf von γ_1 noch γ_2 zu durchlaufen. Der Weg γ^- entspricht dem rückwärts gelaufenen Weg γ. Diese Operationen machen auf den Schlaufen zwar Sinn, allerdings machen sie diese Menge noch nicht zu einer Gruppe (Warum nicht?). Dazu studieren wir die Verträglichkeit der Operationen mit Homotopie:

(a) Zeigen Sie, dass folgende Multiplikation auf den Äquivalenzklassen der Schlaufen wohldefiniert ist: $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Multiplikation assoziativ ist.

(c) Betrachten Sie für den Weg $\epsilon(t) := x_0$ für alle $t \in [0,1]$ die Äquivalenzklasse $[\epsilon]$. Zeigen Sie, dass für jede Schlaufe γ folgendes gilt: $[\gamma] \cdot [\epsilon] = [\gamma] = [\epsilon] \cdot [\gamma]$.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Schlaufe $[\gamma]$ folgendes gilt: $[\gamma] \cdot [\gamma^-] = [\epsilon] = [\gamma^-] \cdot [\gamma]$.

Die Äquivalenzklassen bilden also eine Gruppe, welche man die *Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0* nennt und mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet.
Leider ist es mit unseren Mitteln sehr schwer zu zeigen, dass es metrische Räume gibt, die eine nicht triviale Fundamentalgruppe besitzen: Schon beim Kreis $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist das sehr mühsam, obwohl es anschaulich klar scheint. Aber vielleicht haben Sie ja eine gute Idee:

(e**) Zeigen Sie folgende Aussage: Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{T}, 1)$ des Kreises $\mathbb{T}$ ist nicht trivial: Die Schlaufe $\omega_1(t) := e^{2i\pi \cdot t}$ ist nicht zur konstanten Schlaufe $\epsilon(t) := 1$ homotop.

Bemerkung: Die Fundamentalgruppe des Kreises wird übrigens zyklisch von der Schlaufe ω_1 erzeugt: Es gilt $\pi_1(\mathbb{T}, 1) \cong \mathbb{Z}$. Die Gruppe ist also torsionsfrei, dass heisst keine der Schlaufen $\omega_n(t) := e^{2i\pi n \cdot t}$ ist für $n \neq 0$ zur konstanten Schlaufe $\epsilon = \omega_0$ homotop und es gilt $\omega_m * \omega_n \simeq \omega_{m+n}$.
An dieser Stelle könnten wir jetzt übrigens leicht den Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Auch andere Aspekte der Funktionentheorie, also der Theorie komplex differenzierbarer Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ profitieren vom Konzept der Homotopie. Es kann sich also lohnen, sich hier mit Homotopie zu beschäftigen.

Lösung:

Hier geben wir nur skizzenartig die Argumente an.

(a) Sind $H_1 : \gamma_1 \simeq \alpha_1$ und $H_2 : \gamma_2 \simeq \alpha_2$ Homotopien, so definiert

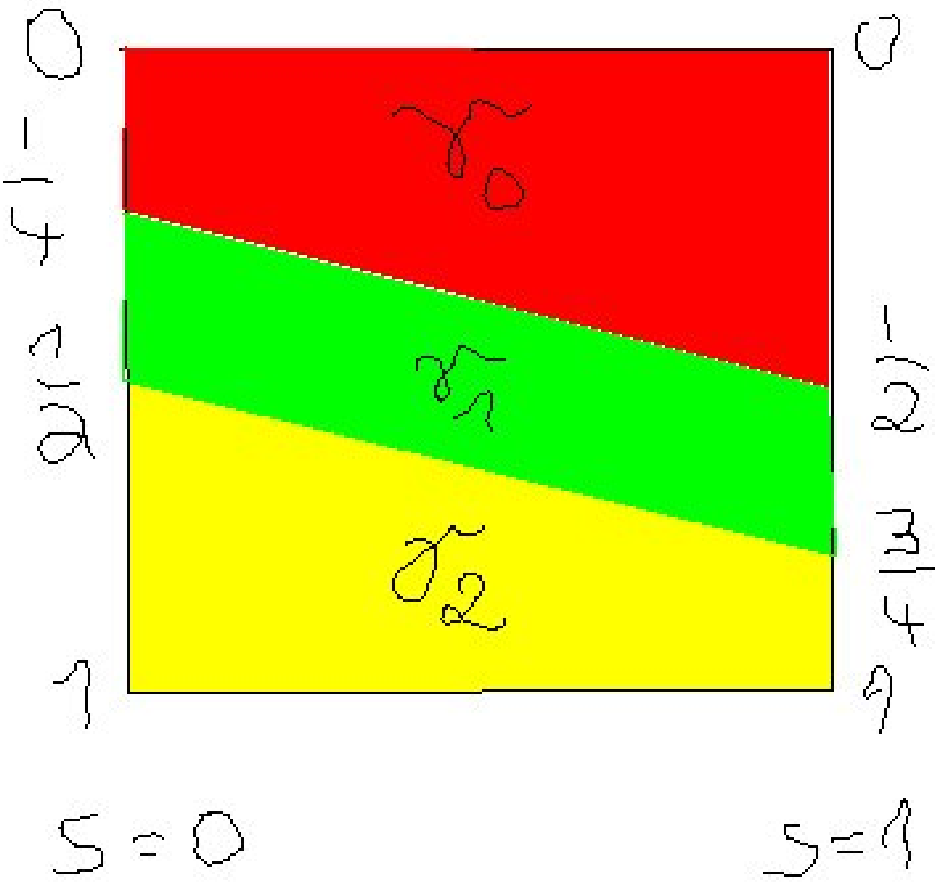
$$H(s,t) := \begin{cases} H_1(s, 2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H_2(s, 2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

eine Homotopie $H : \gamma_1 * \gamma_2 \simeq \alpha_1 * \alpha_2$. Damit ist das Produkt $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

(b) Für die Assoziativität wenden wir Aufgabenteil (d) der vorigen Aufgabe an:
Der Weg $\gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2)$ entsteht durch umparametrisieren aus dem Weg $(\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2$ mit Hilfe der Funktion

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0.5 \cdot t & : t \in [0, 0.5] \\ t - 0.25 & : .5 \le t \le 0.75 \\ 2t - 1 & : 0.75 \le t \le 1 \end{cases}.$$

Damit wären wir mit (d) fertig. Anbei noch eine (hoffentlich richtige) Betrachtung, wie H konkret aussieht:



Um $H : (\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2 \simeq \gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2)$ zu verstehen, hilft uns obige Skizze: Auf dem roten Bereich wird die Homotopie die Werte von γ_0, auf dem grünen Bereich die von γ_1 und auf dem gelben Bereich die von γ_2 annehmen. Laufen wir in einem farbigen Bereich vertikal von der oberen Grenzlinie zur unteren Grenzlinie, so werden alle Werte des entsprechenden Weges angenommen werden.
Betrachten wir zum Beispiel den Punkt $s = \frac{1}{2}$. Dann ist der rote Bereich $\frac{3}{8}$ hoch, der grüne Bereich $\frac{1}{4}$ und der gelbe Bereich $\frac{3}{8}$. Es muß also hier gelten:

$$H(0.5, t) = \begin{cases} \gamma_0\left(\frac{8}{3} \cdot t\right) : & 0 \leq t \leq \frac{3}{8} \\ \gamma_1\left(4 \cdot (t - \frac{3}{8})\right) : & \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{5}{8} \\ \gamma_0\left(\frac{8}{3} \cdot (t - \frac{5}{8})\right) : & \frac{5}{8} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Somit erhalten wir für $H(s,t) := \left((\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2\right)\left((s \cdot t + (1-s) \cdot \varphi(t)\right)$ (hoffentlich):

$$H(s,t) := \begin{cases} \gamma_0\left(\frac{4}{1+s} \cdot t\right) & : 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \gamma_1\left(4 \cdot \left(t - \frac{1+s}{4}\right)\right) & : \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma_2\left(\frac{4}{2-s} \cdot \left(t - \frac{2+s}{4}\right)\right) & : \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig, da auf den Grenzlinien zwischen zwei farbigen Bereichen die entsprechenden Wege konstant x_0 sind. Zusammengesetzte Abbdildungen, die auf abgeschlossenen Mengen stetig sind und auf deren Schnitt übereinstimmen, sind bekanntlich wieder stetig.
Sollte sich in die Konstruktion ein Fehler eingeschlichen haben, findet sich ein Beweis der Assoziativität auch in guten Topologiebüchern, welche Fundamentalgruppen behandeln.

(c) Hier helfen die Umparametrisierungen

$$\varphi_1(t) := \begin{cases} 2t & : 0 \le t \le 0.5 \\ 1 & 0.5 \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) := \begin{cases} 0 & : 0 \le t \le 0.5 \\ 2t-1 & : 0.5 \le t \le 1 \end{cases}.$$

(d) Betrachte $H : [0,1] \times [0,1] \to X$,

$$H(s,t) := \begin{cases} \gamma(2t(1-s)) & : 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2(1-t)(1-s) & : \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie von $\gamma * \gamma^-(t) = H(0,t)$ nach $\epsilon(t) = H(1,t)$.

(e) Siehe z. B. **A. Hatcher**, *Algebraic Topology*, p. 29ff. Dieses Buch ist zur Zeit kostenlos im Internet erhältlich. Eine Suchmaschine Ihrer Wahl hilft sicher.

Knobelaufgabe: Sind Fundamentalgruppen in der Regel abelsch?

Stellen Sie sich vor, Sie wollten ein Bild aufhängen. Am Rahmen dieses Bildes sind dazu bereits beide Enden eines (längeren) Stücks Schnur befestigt. Ist es möglich, das Bild an zwei Nägeln derart aufzuhängen, so dass es runterfällt, wenn man irgendeinen der beiden Nägel entfernt? Erwarten Sie aus dieser Überlegung, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ abelsch ist?
Hinweis: Wählen Sie einen beliebigen Basispunkt x_0, zum Beispiel den Mittelpunkt zwischen den beiden Nägeln oder einen Punkt auf dem Bilderrahmen, und zerlegen Sie ihre Schlaufe zur Befestigung des Bildes in ein dazu homotopes Produkt aus Schlaufen, welche sich je genau einmal um genau einen der beiden Nägel winden. Was müsste intuitiv passieren, wenn die Gruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0,1\}, x_0)$ eine abelsche, also kommutative, Gruppe wäre?
Bemerkung: Diese Aufgabe ist freiwillig, wird nicht bepunktet und ist eher als Ausblick zu verstehen.

Lösung:

Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, dem freien Produkt von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}$. Dieses enthält alle endlichen Wörter in 2 Erzeugern. Nennen wir diese a, b, so ist das leere Wort $\mathbf{0}$, das Wort abb oder auch das Wort $a^{-1}ba^{-1}b^{-1}$ ein Element dieser Gruppe. Es gelten keinerlei Relationen, außer das wir in einem Wort $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}$ oder $b^{-1}b$ weglassen oder durch das leere Wort ersetzen dürfen. Wörter multiplizieren wir durch aneinanderhängen. Beispielsweise gilt $a * (a * b) = aab$. Das leere Wort ist das neutrale Element der Gruppe.
Wäre die Gruppe kommutativ, würde $aba^{-1}b^{-1} = \mathbf{0}$ gelten und die Gruppe wäre zu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ isomorph.
Das Wort $aba^{-1}b^{-1}$ ist genau das Leitmotiv für die Befestigung des Bildes: Nennen wir die Nägel A und B. Dann wickeln wir die Schnur einmal rechtsrum um A, anschliessend rechtsrum um B, anschliessend linksrum um A und zu guter Letzt linksrum um B. Dies erfüllt das Geforderte, wie Sie leicht mit einem Stück Faden und 2 Stiften ausprobieren können...