Analysis 2
10. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
13. Juni 2011

Lösung 1 Berechnung von Integralen

a) Zweimal partielle Integration.

b) Partielle Integration liefert den Integranden $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

c) Substitution mit $y(x) := x^2$.

d) Bei $\tan x = \sin x / \cos x$ drängt sich die Substitution $y(x) = \cos x$ auf.

e) Partielle Integration liefert $\frac{n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$.

f) Subsitution mit $y(x) := \operatorname{arsinh}(x)$ liefert $\frac{1}{2}(\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}) + \frac{1}{2}(\operatorname{arsinh}(b) - \operatorname{arsinh}(a))$.

g) Subsitution mit $y(x) := \arccos(x) \in [0, \pi]$ liefert das Integral

$$\int_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} 1 - \cos^2(y)\, dy \ ,$$

welches man dann mit Aufgabenteil b) lösen kann.

Lösung 2 Fourierreihen

a) Für verschiedene Funktionen, d.h. $n \neq m$ oder sin und cos, verschwinden die Integrale durch partielle Integration oder aus Symmetriegründen. Für $1 \leq n$ ist (vgl. Aufg. 1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx \ .$$

b) Für die Koeffizienten $a_k := \langle h, f_k \rangle / \langle f_k, f_k \rangle$ und $b_k := \langle h, g_k \rangle / \langle g_k, g_k \rangle$ gilt

$$a_0 = \tfrac{1}{3}\pi^2 \ , \qquad a_k = (-1)^k \tfrac{4}{k^2} \ , \qquad b_k = 0 \ .$$

Die Fourierreihe von h ist also

$$P_n(x) = \tfrac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\,x) \ .$$

c) Siehe Abb. 1. Die Fourierreihe konvergiert absolut gleichmäßig, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = 1/3\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert. Somit konvergiert die Funktionenfolge $(P_n)_n$ tatsächlich gleichmäßig. Aber wogegen?

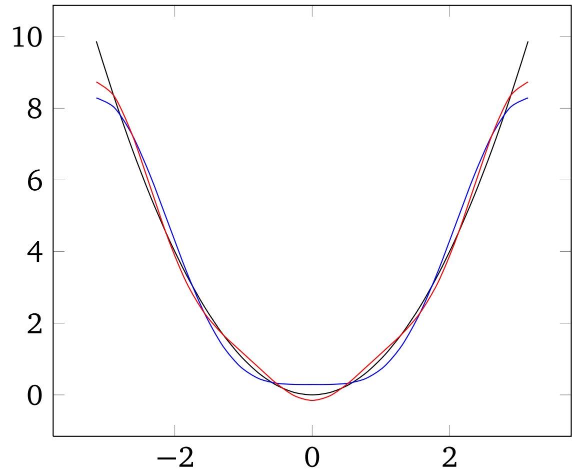

Abbildung 1:

Lösung 3 Das Dirac-Delta

a) Die Abbildung $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx$ ist bilinear und erfüllt damit die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx \cdot \int_{-1}^{1} g(x)^2\,dx\,.$$

Betrachtet man nun die stetigen Zackenfunktionen f_n um 0 mit Höhe 1 (siehe Abb. 2), so gilt $\int_{-1}^{1} f_n(x)^2\,dx \le 2/n$, also mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$1 = \left|\int_{-1}^{1} f_n(x)\delta(x)\,dx\right| \le \tfrac{2}{n} \cdot \int_{-1}^{1} \delta(x)^2\,dx \longrightarrow 0\,.$$

Die gleiche Argumentation kann man übrigens auch in Aufgabenteil c) verwenden.

Alternativ kann man z.B. mit den Zackenfunktionen auch ohne Cauchy-Schwarz einen Widerspruch konstruieren:

$$1 = \left|\int_{-1}^{1} f(x)\delta(x)\,dx\right| \le \|\delta\|_\infty \cdot \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx \to 0$$

Ist vielleicht einfacher, geht auch in Aufgabenteil c).

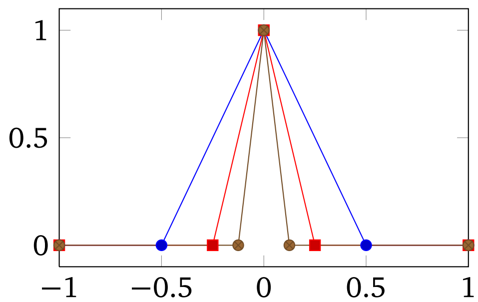

Abbildung 2:

b) Die Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle 0 gesagt gerade, dass für die Supremumsnormen der Einschränkungen $f|_{[-\delta,\delta]}$ gilt:

$$\lim_{\delta \searrow 0} \left\| f|_{[-\delta,\delta]} - f(0) \cdot \mathbb{1} \right\|_\infty = 0 \,,$$

wobei $\mathbb{1}$ die konstante Eins-Funktion auf dem entspr. Intervall bezeichnet. Für die charakteristischen Funktionen (siehe Abb. 3)

$$\delta_n(x) := \tfrac{n}{2} \cdot \chi_{[-1/n,1/n]}$$

z.B. ergibt sich deshalb

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{1} f(x)\delta_n(x)\,dx - f(0) \right| &= \left| \tfrac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x)\,dx - \tfrac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(0)\,dx \right| \\ &\leq \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{2}{n} \cdot \left\| f|_{[-1/n,1/n]} - f(0)\mathbb{1} \right\|_\infty \longrightarrow 0 \,. \end{aligned}$$

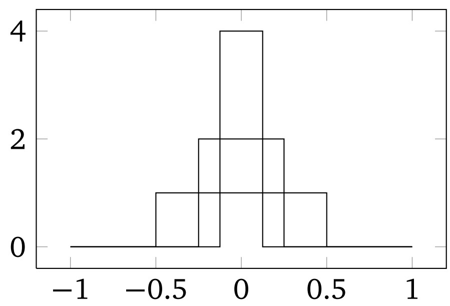

Abbildung 3: