Analysis 2
9. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
06. Juni 2011

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1 Konvergenz von Integralen

a)

$$\left| \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt \right| = \left| \int_x^b f(t)\, dt \right| \leq (b-x) \cdot \left\| f \right\|_\infty \to 0 .$$

Z.B. für die charakteristische Funktion $f := \chi_{[0,1]}$ ist die Funktion $x \mapsto \int_{-1}^x f(t)\, dt$ nicht differenzierbar.

b) Die Regelfunktionen sind der Abschluss der Treppenfunktionen bzgl. der Supremumsnorm. Da alle f_n im Abschluss liegen, liegt auch der Grenzwert f im Abschluss, ist also eine Regelfunktion. (Alternativ kann man die Behauptung auch mit einen $\varepsilon/2$-Argument einfach zeigen.) Die Konvergenzbehauptung folgt dann aus der Lipschitz-Stetigkeit, oder explizit:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b \left| f_n(x) - f(x) \right| dx \leq (b-a) \left\| f_n - f \right\|_\infty \to 0 .$$

Eine punkteweise konvergente Folge reicht nicht, wie z.B. der wachsende Zacken $z_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ zeigt mit (vgl. Abb. 1):

$$z_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{, falls } \leq x \leq 1/n , \\ n^2(2/n - x) & \text{, falls } 1/n < x \leq n , \\ 0 & \text{, falls } 1/n < x \leq 1 . \end{cases}$$

Diese Funktionenfolge $(z_n)_n$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen Null. Jede Funktion hat aber Integral $\int_0^1 z_n(x)\, dx = 1$.

c) Die Exponentialreihe konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$.

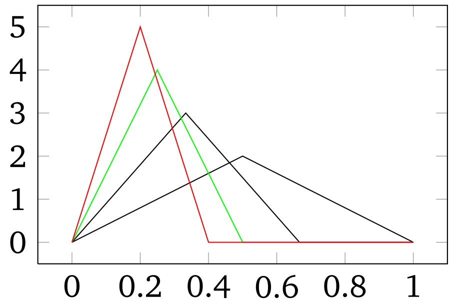

Abbildung 1:

Aufgabe 2 Faktorisierung komplexer Polynome

a) Sukzessives Teilen durch $(z-\lambda)$ für eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert die Behauptung.

b)

$$p(z) = (z-1)^2(z+1)^3\,, \qquad q(z) = \big(z-(1+i)\big)\big(z-(1-i)\big)\big(z-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)\big(z-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)\,.$$

Aufgabe 3 Partialbruchzerlegung komplexer rationaler Funktionen

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1/2i}{z-i} + \frac{-1/2i}{z+i}\,,$$

$$f_2(z) = \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1/4}{(z-i)^2} + \frac{1/4}{(z+i)^2} + \frac{-i/4}{z-i} + \frac{i/4}{z+i}\,.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1

Betrachte $f(x) := (1+x)^{0,8}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Die Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = (1+x)^{0,8-n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(0,8-i)$$

haben wir bereists in der 7. Übung, Hausaufg. 5 berechnet. Das n-te Taylorpolynom ist dann

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{0,8}{k} x^k\,.$$

Diese Polynome können wir an der Stelle $x = 0,1$ auswerten, um eine Approximation zu erhalten. Nach dem Restgliedformel von Lagrange ist der Fehler $R_n := f - T_n$ von der Form

$$R_n(0,1) = \binom{0,8}{n+1}(1+\xi)^{0,8-(n+1)}0,1^{n+1} = \binom{0,8}{n+1}(1+\xi)^{0,8}\left(\frac{0,1}{1+\xi}\right)^{n+1}$$

für eine Zwischenstelle $0 < \xi < 0,1$, also

$$\left|R_n(0,1)\right| \le 0,1^{n+1} \cdot 1,1^{0,8}\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left|\prod_{i=0}^{n}(0,8-i)\right| \le 0,1^{n+1} \cdot 1,1 \cdot 0,8 \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \le \frac{0,1^{n+1}}{n}$$

Aufgabe 2 Faktorisieren reeller Polynome

a) Folgt aus dem komplexen Fall. Beim ausmultiplizieren von $(z-\lambda)(z-\bar{\lambda})$ mit $\lambda = c + id$ ergeben sich die gewünschten Terme.

b)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \left(x - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left((x-1)^2+1\right) ,\\
q(x) &= (x-1)(x+2)(x-3)(x^2+1) .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 Partialbruchzerlegung reeller rationaler Funktionen

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{2}{x-3} + \frac{-14}{(x+5)^2} + \frac{3}{x+5} ,\\
f_2(x) &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{(x^2+1)^2} .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

a) Siehe Abbildung 2. Ist $\left|f(x_0)\right| > C > 0$ für ein $a < x_0 < b$, so gibt es eine ganze Umgebung mit $\left|f(x)\right| > C$ für alle $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ $(\delta > 0)$ und somit

$$
\int_a^b \left|f(x)\right| dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left|f(x)\right| dx \geq C \cdot 2 \cdot \delta > 0 .
$$

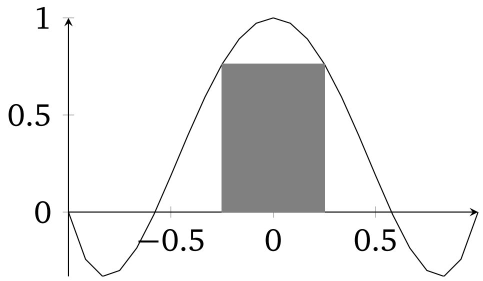

Abbildung 2:

b) Bilinearität klar, Positivität klar, Definitheit nach Aufgabenteil a).

c) Wir konstruieren eine Cauchy-Folge $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt (siehe Abb. 3):

$$
f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - nx & \text{, falls } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{, falls } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}
$$

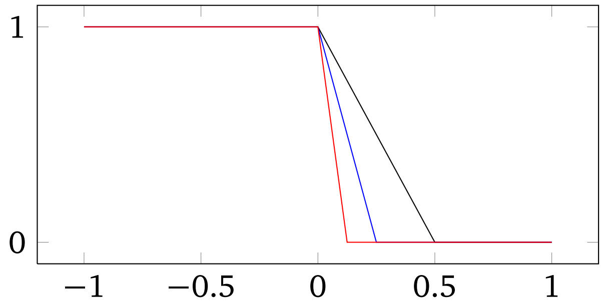

Abbildung 3:

Die Funktionen stimmen auf $[-1,0]$ überein, es gilt $\left\|f_n\right\|_\infty \le 1$ und f_m verschwindet jeweils auf dem Intervall $[\frac{1}{n},1]$ für alle $m \ge n$. Für den Abstand von f_n zu f_m mit $n \le m$ gilt deshalb

$$\begin{aligned}\left\|f_n - f_m\right\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} \left(f_n(x) - f_m(x)\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(f_n(x) - f_m(x)\right)^2 dx \\ &\le \tfrac{1}{n}\left\|(f_n - f_m)^2\right\|_\infty \le \tfrac{1}{n}\left\|f_n - f_m\right\|_\infty^2 \le \tfrac{1}{n}\cdot 4\,.\end{aligned}$$

Für hinreichend großses n ist damit $\left\|f_n - f_m\right\|$ für alle $m \ge n$ hinreichend klein, d.h. $(f_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge.

Wir müssen nun noch zeigen, dass $(f_n)_n$ nicht konvergiert. Wir zeigen dies durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass $(f_n)_n$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegen eine stetige Funktion $f \in \mathscr{C}[a,b]$ konvergiert. Nach Aufgabenteil a) muss f auf dem Intervall $[-1,0]$ konstant 1 sein, denn

$$\left\|f_n - f\right\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \left|f_n(x) - f(x)\right|^2 dx \ge \int_{-1}^{0} \left|f_n(x) - f\,x(x)\right|^2 dx = \int_{-1}^{0} \left|1 - f(x)\right|^2 dx\,,$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0. Völlig analog zeigt man, dass f auf jedem der Intervalle $[\frac{1}{n},1]$ verschwinden muss. Zusammen heißt das: f ist konstant 1 auf $[-1,0]$ und konstant 0 auf $]0,1]$, kann also nicht stetig sein (Widerspruch).