Analysis 2
8. Übung
Lösungshinweise

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
30. Mai 2011

Lösung 1 Der Raum der Treppenfunktionen

Jede Treppenfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist von der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{[a_k, b_k]}$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ und Intervallen $[a_k, b_k] \subseteq [a, b]$ $(a_k \leq b_k)$. Damit lässt sich leicht direkt nachrechnen, dass $\mathcal{T}[a, b]$ ein linearer Teilraum aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist und das Integral linear.

Lösung 2

a) Für Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}$ ist die Ungleichung mit $|f| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \chi_{I_k}$ und $\|f\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |c_k|$ leicht direkt nachgerechnet.

Alternativ: Es gilt punktweise $-\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1} \leq -|f| \leq f \leq |f| \leq \|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}(x) = 1$ für alle $x \in [a, b]$ die konstante Einsfunktion bezeichnet. Integrieren liefert mit der Monotonieeigenschaft die Behauptung.

b)
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big) \right| \leq (b-a)\|f - g\|_\infty .$$

Lösung 3 Das Integral von Polynomfunktionen

a) Da f monoton wächst, gilt

$$\|f - f_n\|_\infty = \max\left\{ f\left((k+1)\cdot\frac{a}{n}\right) - f\left(k \cdot \frac{a}{n}\right) : 0 \leq k < n \right\}.$$

Offensichtlich ist die rechte Seite in n eine Nullfolge, da f gleichmäßig stetig auf $[0, a]$ ist.

c) Per Definition gilt

$$\int_0^a f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(t)dt .$$

Wir berechnen die rechte Seite und erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{a^4}{n^4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{a^4}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{n^4} = \frac{a^4}{4}.$$

Hausaufgabe

Lösung 1 Konvexe Funktionen und wichtige Ungleichungen

a) Induktionsschritt: Setze $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k =: \mu$ und $\frac{1}{\mu} \cdot \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k =: x$. Dann gilt $x \in I$, also folgt

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot x_k\right) &= f(\mu \cdot x + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}) \\ &\leq \mu \cdot f(x) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) \text{ (da die Funktion konvex ist)} \\ &\leq \left(\mu \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} f(x_k)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \text{ (Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(\cdot x_k). \end{aligned}$$

b) Es ist $\ln'' = -x^{-2}$, also ist ln auf $]0.\infty[$ strikt konkav. Damit erfüllt $(-\ln)$ die Jensensche Ungleichung, was bedeutet, dass ln die Jensensche Ungleichung mit umgedrehtem Relationszeichen erfüllt:

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \ln(x_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}\right).$$

Anwenden der streng monoton wachsenden Exponentialfunktion liefert schließlich die Behauptung.

c) Wir betrachten den Fall $v \neq 0$ und $w \neq 0$. Wenden wir (b) auf die Ausdrücke $\left(\frac{|v_k|^p}{\|v\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p}}$ und $\left(\frac{|w_k|^q}{\|q\|_q^q}\right)^{\frac{1}{q}}$ an, so erhalten wir

$$\frac{|v_k \cdot w_k|}{\|v\|_p \cdot \|w\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|v_k|^p}{\|v\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q}.$$

Summieren wir über alle $1 \leq k \leq n$, so folgt leicht die Behauptung.

d) Seien $v, w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|v\|_p, \|w\|_p \leq 1$. Weil die Funktion $x \mapsto x^p$ auf $]0, \infty[$ konvex ist, folgt für alle $0 \leq \lambda \leq 1$

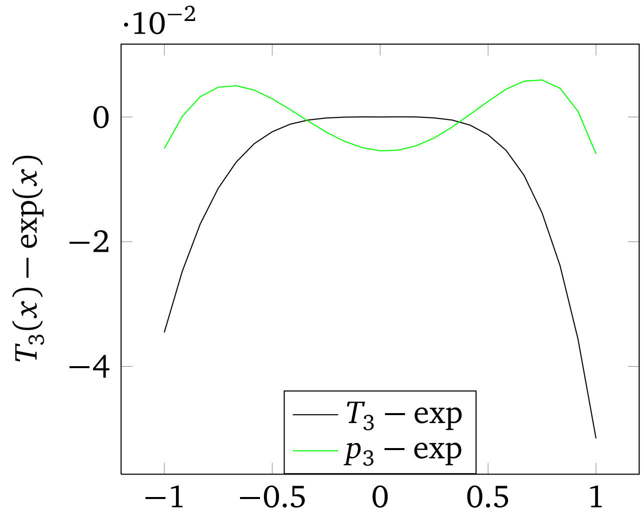
$$\begin{aligned} \|v+w\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} \left|\lambda v_k + (1-\lambda) w_k\right|^p &\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} (\lambda\left|v_k\right| + (1-\lambda)\left|w_k\right|)^p \\ &\overset{\text{konvex}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \lambda\left|v_k\right|^p + (1-\lambda)\left|w_k\right|^p = \lambda\|v\|_p^p + (1-\lambda)\|w\|_p^p \leq 1. \end{aligned}$$

Dies zeigt den ersten Hinweis.

Seien nun $v, w \in \mathbb{C}^n$. Betrachte $\tilde{v} := v/\|v\|_p$ und $\tilde{w} := w/\|w\|_p$. Wegen $\|\tilde{v}\|_p, \|\tilde{w}\|_p \leq 1$ folgt aus dem Hinweis mit $\lambda := \frac{\|v\|_p}{\|v\|_p + \|w\|_p}$ und $(1-\lambda) = \frac{\|w\|_p}{\|v\|_p + \|w\|_p}$:

$$1 \geq \|\lambda \tilde{v} + (1-\lambda)\|_p = \left\|\frac{v}{\|v\|_p + \|w\|_p} + \frac{w}{\|v\|_p + \|w\|_p}\right\|_p = \frac{\|v+w\|_p}{\|v\|_p + \|w\|_p}.$$

Lösung 2 Tschebyscheff Polynome



Lösung 3 Äquivalenzrelationen auf Regelfunktionen

a) Reflexivität und Symmetrie sind klar. Transitivtät folgt daraus, dass die Vereinigung zweier endlicher Mengen wieder endlich ist.

b) Sind $f, g \in [0]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$, also für fast alle $x \in [a, b]$. Damit folgt $\lambda f \in [0]$. Sei N_f die Nullstellenmenge von f und N_g die Nullstellenmenge von g, so ist für alle $x \in N_f \cap N_g$ auch $f(x) + g(x) = 0$. Da das Komplement der Mengen N_f und N_g endlich ist, so ist auch das Komplement von $N_f \cap N_g$ endlich, also folgt $f + g \in [0]$.

c) Angenommen, $f, g \in [f]$ sind stetige Funktionen. Dann ist $f - g$ ebenfalls stetig. Angenommen, $f - g \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung mit $|f - g| \neq 0$ auf dieser Umgebung. Das sind dann aber unendlich viele Punkte, also gibt es solch eine Umgebung nicht und es folgt $f = g$.

d) Aus $f \sim g$ folgt $f(x) = g(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\{x_k\}}(x)$ für $x_1 \leq \ldots \leq x_n \in [a, b]$ und Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$. Ist also $(f_n)_n$ eine approximierende Familie von Treppenfunktionen für f, so ist $\left(f_n - \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\{x_k\}}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Familie von Treppenfunktionen für g. Es reicht also zu zeigen, dass das Integral über $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\{x_k\}}$ verschwindet. Dies folgt direkt aus der Definition:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} \chi_{x_k}(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0 \, .$$

e) Das ist leider nicht wahr. Setze

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \chi_{\frac{1}{k}} \, .$$

Dann ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent, aber die Grenzfunktion S ist nicht identisch Null f. ü. Also ist $[(0)]$ nicht abgeschlossen.