Analysis 2
7. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
23. Mai 2011

Anwesenheitsübungen

Lösung 1 Hyperbelfunktionen

a)

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,.$$

b) Einfach nachrechnen.

c) Siehe Wikipedia oder Wolfram Alpha (www.wolframalpha.com).

d) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$. Weil cosh auf ganz $\mathbb{R}$ strikt positive Werte annimmt, ist sinh streng monoton steigend. Ebenso ist $\sinh(x) > 0$ für $x > 0$. Somit ist cosh auf $[0,\infty[$ strikt monoton steigend.

e)

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \qquad \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

f) Die erste Gleichung folgt leicht aus $\sinh(z) + \cosh(z) = e^z$. Die zweite Gleichung ergibt sich durch intensives Nachrechnen von

$$\sinh\big(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\big) = x\,.$$

Lösung 2 L'Hospital

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{1-\cos x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sinh x}{\sin x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cosh x}{\cos x} = \frac{-1}{1} = 1\,.$$

b)

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\searrow 0} -x = 0\,.$$

c) Es ist $(1+\frac{a}{x})^x = \exp\big(x \cdot \ln(1+\frac{a}{x})\big)$. Für den inneren Ausdruck ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{1/x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{a}{x^2}\cdot 1/(1+\frac{a}{x})}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{1+\frac{a}{x}} = a\,.$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = \exp(a)$.

Lösung 3 Kurvendiskussion am Beispiel Entropie

a) Für $0 < \lambda < 1$ ist S als Komposition differenzierbarer Funktionen auch differenzierbar. Weil der Grenzwert $\lim_{x\to 0} x \ln x$ existiert, ist f an der Stelle $\lambda = 0$ stetig mit $S(0) = 0$, und wegen der Symmetrie $\lambda \longleftrightarrow (1-\lambda)$ auch an der Stelle $\lambda = 1$ mit $S(1) = 0$.

b) Ableiten liefert $S'(\lambda) = \ln(1-\lambda) - \ln(\lambda)$. Ist λ_0 eine kritische Stelle ($S'(\lambda_0) = 0$), so folgt $\ln(\lambda_0) = \ln(1-\lambda_0)$. Anwendung der Exponentialfunktion liefert $\lambda_0 = 1 - \lambda_0$, also $\lambda_0 = 1/2$. An der dieser Stelle hat S also ein lokales Extremum mit $S(1/2) > 0$. Wegen $S(0) = S(1) = 0$ muss es sich dabei um das globale Maximum handeln. (Andernfalls gäbe es weitere kritische Stellen.) Weil es keine weiteren kritischen Stellen gibt, gibt es keine weiteren lokalen Extrema, und $S(0) = S(1) = 0$ ist das globale Minimum.

c) Die Logarithmusfunktion ist auf ganz $]0, \infty[$ monoton wachsend. Für $0 < \lambda < 1/2$ ist $\lambda < (1-\lambda)$ und somit $S'(\lambda) = \ln(1-\lambda) - \ln(\lambda) > 0$. Folglich ist S auf dem Intervall $[0, 1/2]$ streng monoton wachsend. Analog ist S auf $[1/2, 1]$ streng monoton fallend.

Lösung 4 Wendepunkte und Van der Waals Gas

Wir suchen $T_k > 0$ und $V_k > 0$ mit $p_{T_k}'(V_k) = 0$ und $p_{T_k}''(V_k) = 0$. Aus der diesen beiden Gleichung ergibt sich

$$2a(V_k - b)^2 = RT_k V_k^3 \,, \qquad\qquad 3a(V_k - b)^3 = RT_k V_k^4 \,.$$

Durch Einsetzen / Gleichsetzen ergibt sich daraus $V_k = 3b$ und somit $T_k = 8a/27Rb$ und $p_k := p_{T_k}(V_k) = a/27b^2$.

Hausübungen

Lösung 1 Lemma von Darboux

Das Vorgehen hier ist analog zum Satz von Rolle und dem Mittelwertsatz. Setze $g(x) := f(x) - cx$. Dann gilt $g'(x) = f'(x) - c$, also insbesondere $g'(a) < 0$ und $g'(b) > 0$. Die Funktion g nimmt auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ an einer Stelle $a \le \xi \le b$ ihr Maximum an. An dieser Stelle gilt $g'(\xi) = 0$, also $f'(\xi) = c$. (Wegen $f'(a) < c < f'(b)$ gilt dann auch $a \neq \xi \neq b$, also $a < \xi < b$.)

Lösung 2

Wir entwickeln f in eine Potenzreihe

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \,.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist dies die Taylorreihe von f. Das Taylorpolynom der Ordnung 6 ist somit

$$T_6 f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \,.$$

Lösung 3

a) Vollständige Induktion.

b) Mittels vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, indem man den Differenzenquotienten betrachtet:

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) - 0}{x} = \frac{p(x)}{q(x)} \exp(-\frac{1}{x^2}) \xrightarrow{x\to 0} 0 \,.$$

Die Taylorreihe von f ist also die konstante Nullfunktion. Die Taylorreihe konvergiert also genau an einem Punkt ($x_0 = 0$) gegen die Funktion.

Lösung 4 Konvexe Funktionen

b) Nicht konvex ist nur $f(x) = x^3$.

c) Sei zuerst f eine konvexe Funktion, und sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Wir zeigen, dass die Sekantensteigung $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ zwischen $f'(x)$ und $f'(y)$ liegt. Für $0 < \lambda < 1$ betrachte die Zwischenstelle $x < z_\lambda < y$ mit $z_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$. Beachte, dass $\lim_{\lambda\to 1} z_\lambda = x$ und $\lim_{\lambda \to 0} z_\lambda = y$ gilt. Durch die Konvexität ergibt $f(z_\lambda) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ und somit

$$\frac{f(z_\lambda) - f(x)}{z_\lambda - x} \le \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} .$$

Die linke Seite dieser Ungleichung konvergiert für $\lambda \to 1$ gegen die Ableitung $f'(x)$, so dass die Ungleichung $f'(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ folgt. Analog ergibt sich für $\lambda \to 0$ die andere Ungleichung $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'(y)$.

Für die andere Implikation sei die Ableitung f' monoton wachsend. Wir führen eine Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gibt $x, y \in \mathbb{R}$ und $0 \le \lambda \le 1$ mit

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) .$$

Es folgt $0 < \lambda < 1$. Außerdem können wir o.B.d.A. $x < y$ annehmen. Setze $z := \lambda x + (1-\lambda)y$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann eine Zwischenstelle $x < \xi_1 < z$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} > \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} .$$

Ebenso nach dem Mittelwertsatz gibt es eine Zwischenstelle $z < \xi_2 < y$ (insbes. $\xi_1 < \xi_2$) mit

$$f'(\xi_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} < \frac{f(y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y)}{y - \lambda x - (1-\lambda)y} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < f'(\xi_1) .$$

Lösung 5 Binomische Reihe

(a) Mit Hilfe von vollständiger Induktion läßt sich leicht zeigen: $f^{(n)}(x) = \binom{a}{n} \cdot n! \cdot (1+x)^{a-n}$. Wir zeigen hierbei nur den Induktionsschritt, wobei wir bei der zweiten Umformung die Induktionsannahme verwenden:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= f^{(n)}(x) \\ &= \left(\binom{a}{n} \cdot n! \cdot (1+x)^{a-n}\right)' \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1}(a-k)\right) \cdot (a-n) \cdot (1+x)^{a-n-1} \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n}(a-k)\right) \cdot (1+x)^{a-(n+1)} \\ &= \binom{a}{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (1+x)^{a-(n+1)}. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität: $f^{(n)}(0) = \binom{a}{n} \cdot n!$ und wir erhalten die Taylorreihe

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{n} \cdot x^n.$$

Nun bleibt die Frage, ob die Taylorreihe lokal gleichmäßig gegen die Funktion konvergiert. Dazu zeigen wir, dass auf jedem Kompaktum $[0, b] \subseteq]-1, 1[$ mit $b > 0$ das Restglied $R_n(x)$ gleichmäßig gegen die konstante Nullfunktion konvergiert. Wir erhalten eine Folge $\xi_n \in]0, b[$ mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi_n)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1]} = \binom{a}{n+1} \cdot (1+\xi_n)^{a-(n+1)} \cdot x^{n+1}.$$

Unmittelbar sehen wir:

$$|R_n(x)| \leq \binom{a}{n+1} \cdot (1+\xi_n)^{a-(n+1)} \cdot b^{n+1}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| &\leq \lim_{n\to\infty} \binom{a}{n+1} \cdot (1+\xi_n)^{a-(n+1)} \cdot b^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1+\xi_n)^{a-(n+1)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \left(\left|1-\frac{a}{k}\right| \cdot b \right).
\end{aligned}$$

Da die Folge $((1+\xi_n)^{a-(n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, reicht es aus zu zeigen, dass die durch das Produkt definierte Folge eine Nullfolge ist. Dies folgt aber unmittelbar aus der Tatsache, dass $(\left|1-\frac{a}{k}\right| \cdot b)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert, es also ein $0 < q < 1$ gibt und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\left|1-\frac{a}{k}\right| \cdot b < q$ für alle $n > n_0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\left|1-\frac{a}{k}\right| \cdot b \right) &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n_0} \left(\left|1-\frac{a}{k}\right| \cdot b \right) \cdot \prod_{k=n_0+1}^{n-1} \left(\left|1-\frac{a}{k}\right| \cdot b \right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} q^{n-n_0-1} \cdot \prod_{k=0}^{n_0} \left(\left|1-\frac{a}{k}\right| \cdot b \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also konvergiert das Restglied auf jedem Kompaktum in $[0,1[$ gleichmäßig gegen 0, also lokal gleichmäßig gegen 0 auf $[0,1[$, woraus folgt:

$$f(x) = T_f(x)$$

für alle $x \in [0,1[$.

(b) Wir setzen $x := \left(\frac{v}{c}\right)^2$ und betrachten E nur für Geschwindigkeiten v mit $|v| \leq |c|$. Das ist physikalisch sinnvoll, glaube ich... Dann gilt:

$$E(x) = m_0 \cdot c^2 \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}},$$

also nach a):

$$\begin{aligned}
E(x) &= m_0 \cdot c^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^k \\
&= m_0 \cdot c^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^{2k} \\
&= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - \ldots + \ldots - \ldots + \ldots \ldots
\end{aligned}$$

Der nullte Term ist also physikalisch die Ruheenergie des Teilchens, der erste Term die gewohnte kinetische Energie, den Rest ...