Analysis 2
6. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
16. Mai 2011

Anwesenheitsübungen

Lösung 1 Links- und rechtsseitige Ableitung

b) $\Rightarrow$ a) ist trivial.

Es gelte a). Sei $(h_n)_n$ eine Nullfolge mit $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bezeichne mit $(h_n^+)_n$ die Folge der positiven Folgenglieder und mit $(h_n^-)_n$ die Folge der negativen Folgenglieder. Nach a) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n^+) - f(x)}{h_n^+} = f'_+(x) = f'_-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n^-) - f(x)}{h_n^-} .$$

Man zeigt damit leicht (z.B. mit „Sei $\varepsilon > 0.\ \ldots$“), dass damit auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$$

existiert und gleich $f'_+(x) = f'_-(x)$ ist.

Lösung 2 Umkehrfunktionen von Sinus und Kosinus

a)
1. Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion. Der Kosinus ist auf $[0, \pi/2[$ strikt positiv, denn $\pi/2$ ist die kleinste, positive Nullstelle der Kosinusfunktion. Wegen $\cos(x) = \cos(-x)$ ist damit der Kosinus auf $]-\pi/2, \pi/2[$ strikt positiv. Es folgt (aus dem Mittelwertsatz), dass der Sinus auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton steigt.
2. Die Ableitung der Kosinusfunktion ist das Negative der Sinusfunktion. Wegen $\sin(0) = 0$ und dem vorherigen Aufgabenteil ist der Sinus auf dem Intervall $]0, \pi/2]$ strikt positiv. Wegen $\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2 + x)$ ist die Sinusfunktion auch auf dem Intervall $]0, \pi[$ strikt positiv, das Negative der Sinusfunktion also strikt negativ. Es folgt, dass die Kosinusfunktion auf diesem Intervall streng monoton fällt.

b) Auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ ist der Kosinus positiv. Deshalb gilt dort $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ und somit

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'\big(\arcsin(y)\big)} = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(y)\big)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Analog erhält man

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Lösung 3 Lipschitzstetigkeit

b) Sei $\epsilon > 0$. Setze $\delta := \epsilon/L$. Dann gilt für alle $x, y \in D$ mit $\left\|x - y\right\| < \delta$ auch

$$\left\|f(x) - f(y)\right\| \leq L\left\|x - y\right\| < L\delta = \varepsilon\,.$$

c) Auf dem Kompaktum D ist die stetige Ableitung f' beschränkt. Setze $L := \max_{x\in D}\left|f'(x)\right|$. Wir zeigen per Widerspruch, dass L eine Lipschitz-Konstante von f ist. Wir nehmen dazu an, es gibt $x, y \in D$ mit $\left|f(x) - f(y)\right| > L\left|x - y\right|$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann eine Stelle $x < \xi < y$ mit

$$L = f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \qquad \Rightarrow \qquad \left|f'(\xi)\right| = \frac{\left|f(x) - f(y)\right|}{\left|x - y\right|} > L\,,$$

ein Widerspruch.

d) Wegen der Linearität genügt es $\left\|f(x)\right\| \leq L\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist von der Form $f(x) = Ax$ mit einer $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j}$, also

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{nm}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, x\rangle \end{pmatrix}\,,$$

wobei $a_1, \ldots, a_m$ die Zeilen von A bezeichnet. Setze $C := \max_{i=1}^m \left\|a_i\right\|$. Dann ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left\|f(x)\right\|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle\, a_i, x\,\rangle\right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left\|a_i\right\|^2 \cdot \|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^m C^2\,\|x\|^2 = mC^2\|x\|^2\,,$$

also $\left\|f(x)\right\| \leq \sqrt{m}\,C\,\|x\|$.

Hausübungen

Lösung 1 Ableitung auf endlichen Teilräumen

a) Als Basis wählen wir z.B. die Monome $p_0, \ldots, p_5$ mit $p_k(x) := x^k$. Man rechnet leicht nach, dass für alle $k > 0$ gilt:

$$Dp_0 = 0\,, \qquad\qquad Dp_k = k \cdot p_{k-1}\,.$$

Die Matrix von D bzgl. dieser Basis hat also die Form

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

b) Als Basis wählen wir z.B. die Funktionen $f_0, \ldots, f_5$ mit $f_k(x) := x^k e^x$. Man rechnet leicht nach, dass für alle $k > 0$ gilt

$$Df_0 = f_0\,, \qquad\qquad Df_k = kf_{k-1} + f_k\,.$$

Die Matrix von D bzgl. dieser Basis hat also die Form

$$[D] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Lösung 2 Äquivalenz von Normen

a) Ist $(x_n)_n$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergent gegen $x \in E$, so ist $(\left\|x_n - x\right\|_1)_n$ einen Nullfolge. Wegen $\left\|x_n - x\right\|_2 \leq M\left\|x_n - x\right\|$ ist damit auch $(\left\|x_n - x\right\|_2)_n$ eine Nullfolge, d.h. $(x_n)_n$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegen x.

b) Für einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1$ gitl auch $\left|x_k\right| \leq 1$ für alle k. Somit folgt

$$\|x\|_2 = 1 = \|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|x_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \left|x_k\right| = \|x\|_1 \,.$$

Somit gilt $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Für die andere Ungleichung sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \left|x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k x_k = \langle \epsilon, x \rangle$$

mit $\epsilon := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ und

$$\epsilon_k := \begin{cases} x_k/\left|x_k\right| & \text{, falls } x_k \neq 0 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Für den Vektor $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ gilt

$$\|\epsilon\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\epsilon_k\right|^2 \leq n \,,$$

denn $\left|\epsilon_k\right| \in \{0, 1\}$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich somit

$$\|x\|_1 = \langle \epsilon, x \rangle \leq \|\epsilon\|_2 \cdot \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2 \,.$$

c)
1. Es bezeichne $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die kanonische Basis. Setze $M := \max_{k=1}^{n} \left\|e_k\right\|$. Dann gilt

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|x_k\right| \cdot \left\|e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|x_k\right| \cdot M = M \cdot \|x\|_1 \,.$$

2. Die Stetigkeit folgt wie im ersten Aufgabenteil.

   Die Menge S ist abgeschlossen und beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_1$. Weil die 1-Norm und die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind, ist S damit auch abgeschlossen und beschränkt bzgl. der euklidischen Norm, also kompakt bzgl. $\|\cdot\|_2$. Wiederum wegen der Äquivalenz von euklidischer Norm und 1-Norm ist S dann auch kompakt bzgl. $\|\cdot\|_1$.

3. Wir statten $\mathbb{R}^n$ mit der 1-Norm $\|\cdot\|_1$ aus. Die stetige Funktion $x \to \|x\|$ nimmt dann auf der kompakten Menge S ein Minimum $m > 0$ an, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

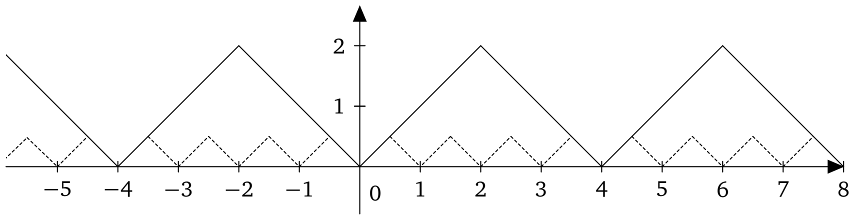
$$\|x\|_1 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad m \leq \|x\| \,.$$

   Es folgt $m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Mündliche Hausübung

Lösung 3 Stetig, aber nirgends differenzierbar

a)



Die Funktion s_k ist periodisch mit Periode $4 \cdot 4^{-k}$. Auf dem Intervall $[0, 2 \cdot 4^{-k}]$ ist s_k affin linear mit $s_k(x) = x$ für alle $0 \leq x \leq 2 \cdot 4^{-k}$. Auf dem Intervall $[2 \cdot 4^{-k}, 4 \cdot 4^{-k}]$ ist s_k affin linear mit $s_k(4 \cdot 4^{-k} - x) = x$ für alle $0 \leq x \leq 2 \cdot 4^{-k}$. Weiter gilt $\left\|s_k\right\|_\infty = 2 \cdot 4^{-k}$.

b) Die Funktionenreihe konvergiert sogar absolut, denn es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|s_k\right\|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 4^{-k} = \frac{2}{1 - 1/4} .$$

Damit konvergiert die Funktionenreihe $f = \sum_{k=0}^{\infty} s_k$. Jede der Funktionen s_k ist stetig. Damit ist auch der gleichmäßige Grenzwert f stetig.

c) Je nachdem, wo x liegt, wählen wir $h_n := +4^{-n}$ oder $h_n := -4^{-n}$ so, dass s_n auf dem Intervall $[x, x + h_n]$ bzw. $[x + h_n, x]$ affin linear ist. Damit ist dann auch für alle $k \leq n$ die Funktion s_k auf dem entspr. Intervall affin linear mit

$$s_k(x + h_n) = s_k(x) \pm h_n .$$

Für alle $k > n$ ist s_k periodisch mit Periode $4 \cdot 4^{-k}$. Weil $\pm h_n$ ein Vielfaches dieser Periode ist, gilt $s_k(x + h_n) = s_k$ für alle $k > n$.

Für den Differenzenquotienten ergibt sich

$$\begin{aligned} D_n := \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} &= \frac{1}{h_n} \sum_{k=0}^{\infty} \big(s_k(x + h_n) - s_k(x)\big) \\ &= \frac{1}{h_n} \sum_{k=0}^{n} \big(s_k(x) \pm h_n - s_k(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\pm h_n}{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \pm 1 , \end{aligned}$$

insbesondere ist der Quotient ganzzahlig. Für gerades n ist die Anzahl der Summanden ungerade, und damit ist D_n auch ungerade. Für ungerades n ist D_n gerade. Insbesondere kann damit die Folge der Differenzenquotienten $(D_n)_n$ keine Nullfolge sein, obwohl $h_n = \pm 4^{-n}$ eine Nullfolge bildet. Die Funktion f ist somit an der Stelle x nicht differenzierbar.