Mulo Übung 5

Aufgabe 1:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} 3x^2+3hx+h^2 = 3x^2.$$

Aufgabe 2: Auf $\mathbb{R}-\{0\}$ ist $f(x)$ differenzierbar mit Ableitung $\operatorname{sgn}(x)$ (leicht).

In 0 ist f nicht differenzierbar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (+\tfrac{1}{n})\cdot(-n) = -1.$$

Also existiert der Differentialquotient nicht.

Aufgabe 3: Bis auf (j) sehr einfach.

$h(x) = x^x = \exp(x\cdot\ln(x))$. Rest leicht.

Aufgabe 4: Der Beweis wäre sehr schön, wenn klar wäre, daß $\left(\frac{1}{f}\right)$ differenzierbar ist. Leider ist dies nicht diskutiert, so daß im Prinzip gar nichts folgt...

Aufgabe 5:

a) Induktion: $n=2$ $\quad (f_1 \cdot f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$

$$(IS): \left(\prod_{k=1}^{n+1} f_k\right)' = \left(\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right) \cdot f_{n+1}\right)'$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} f_k' \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} f_l\right) f_{n+1} + \left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right) \cdot f_{n+1}'$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} f_k' \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} f_l .$$

b) Klar: Kettenregel und $\ln' = \frac{1}{x}$ auf $]0,\infty[$.

c) Folgt sofort aus a) und b):

$$\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)\right)' = \frac{\sum f_k' \cdot \prod f_l}{\prod f_m} = \sum \frac{f_k'}{f_k} .$$

Aufgabe 6

a) Ist $x \in \mathbb{K}^n$ beliebig, dann gibt es eine Kugel $K_\varepsilon(x)$ mit $\overline{K_\varepsilon(x)} \cap A \neq \emptyset$. Weiter gilt

$$d_A(x) = d_{\overline{K_\varepsilon(x)} \cap A}(x).$$

Da $\overline{K_\varepsilon(x) \cap A}$ abg. und beschr. also kompakt ist, gibt es einen Punkt $a \in \overline{K_\varepsilon(x)} \cap A$ mit

$$d_A(x) = \|x-a\|_2,$$

denn $x \to d_A(x)$ ist stetig, was aus der Abschätzung

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} \{\|x-a\|_2\} \leq \inf_{a \in A} \{\|x-y\|_2 + \|y-a\|_2\}$$

$$= \|x-y\|_2 + d_A(y)$$

und Folgenkriterium oder ε-δ-Kriterium leicht folgt.

c) Betrachte $A := \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 > 0\}$. Dann gilt

$$d_A(0) = 0, \quad \text{aber } 0 \notin A.$$

Betrachte $A := \left\{ \binom{-1}{0}, \binom{1}{0} \right\}$. Dann gilt

$$d_A\left(\binom{0}{0}\right) = 1 = \left\|\binom{-1}{0}\right\|_2 = \left\|\binom{1}{0}\right\|_2.$$

Es gibt also 2 Lotpunkte.

(d) Ist $x \in \bar{A}$, so folgt $d_A(x) = 0$ aus der Existenz eines gegen x konv. Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$:

$$d_A(x) \leq \|x - x_n\|_2 .$$

Die rechte Seite bekommen wir beliebig klein ...

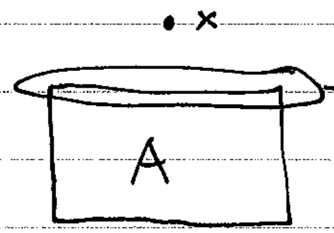
Ist $x \notin \bar{A}$, so auch eine Kugel $K_\varepsilon(x)$, da $\bar{A}^c$ offen ist.

Wähle Kugeln $K_{\varepsilon_1}(x) \subseteq K_\varepsilon(x)$ mit $\overline{K_{\varepsilon_1}(x)} \cap \bar{A} = \emptyset$, $\overline{K_{\varepsilon_2}(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$.
Nach (a) ex. Lotpunkt $a \in \overline{K_{\varepsilon_2}(x)} \cap \bar{A}$, also

$$d_A(x) \geq d_{\overline{K_{\varepsilon_2}(x)} \cap \bar{A}}(x) = \|x - a\|_2 .$$

Da $\|x - a\|_2 > \varepsilon_1 > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

(e) Nein, da Einheitskugeln von $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_\infty$ nicht strikt konvex sind:



Alle Lotpunkte ...

Aufgabe 7

a) Es gilt mit $D := \mathbb{C} - \{0\}$:

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{\exp(z)-1-z}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot z^n\right|$$

$$\leq \lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z}\sum_{n=2}^{\infty} z^n\right| \leq$$

$$\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}|z|^n = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1-|z|}-1 = 0.$$

b) $$\lim_{z\to z_0}\frac{\exp(z)-\exp(z_0)}{z-z_0} = \exp(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{\exp(z-z_0)-1}{z-z_0}$$

$$= \left(\lim_{z\to 0}\frac{\exp(z)-1}{z}\right)\cdot\exp(z_0) = \exp(z_0).$$

~~c) Wähle $x_n := i \cdot \frac{1}{n}$. Dann folgt~~

$$\cancel{1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(x_n)-1}{x_n} = \lim_{n\to\infty}}$$

c) Wähle $D := \mathbb{R}\cdot i$, dann folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{x}{i}) + i\sin(\frac{x}{i}) - 1}{i\cdot\frac{x}{i}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{i})}{\frac{x}{i}} + \lim_{x\to 0} -i\frac{\cos(\frac{x}{i})-1}{(\frac{x}{i})}$$

Also $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$, $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$.

d) Es ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \sin(x) \frac{\cos(h)-1}{h} =$$

$\cos(x)$.

Analog mit $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$ ...

Aufgabe 8

Beobachtung: $\mathcal{C}_n$ besteht aus 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen der Länge $(\frac{1}{3})^n$. Ist ferner $[\frac{a_n}{3^n}, \frac{a_n+1}{3^n}] \subseteq \mathcal{C}_n$ solch ein Intervall, so ist

$$\left[\frac{a_n}{3^n}, \frac{3a_n+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{3a_n+2}{3^{n+1}}, \frac{a_n+1}{3^{n+1}}\right] \subseteq \mathcal{C}_{n+1}.$$

Dies folgt aus

$$\left[\frac{a_n}{3^n}, \frac{a_n+1}{3^n}\right] = \left[\frac{3a_n}{3^{n+1}}, \frac{3a_n+3}{3^{n+1}}\right]$$

$$= \left[\frac{3a_n}{3^{n+1}}, \frac{3a_n+1}{3^{n+1}}\right] \dot{\cup} \left]\frac{3a_n+1}{3^{n+1}}, \frac{3a_n+2}{3^{n+1}}\right[\dot{\cup} \left[\frac{3a_n+2}{3^{n+1}}, \frac{3a_n+3}{3^{n+1}}\right]$$

Weiter gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\left[\frac{a_n}{3^n} - \varepsilon, \frac{a_n+1}{3^n} + \varepsilon\right] \cap \mathcal{C}_n = \left[\frac{a_n}{3^n}, \frac{a_n+1}{3^n}\right].$$

Damit folgt, daß $\frac{a_n}{3^n} \in \partial\mathcal{C}_n$ und $\frac{a_n+1}{3^n} \in \partial\mathcal{C}_n$.

Weiter folgt

$$\left[\frac{a_n}{3^n} - \frac{\varepsilon}{3}, \frac{a_n+1}{3^n} + \frac{\varepsilon}{3}\right] \cap \mathcal{C}_{n+1} = \left[\frac{a_n}{3^n}, \frac{3a_n+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{3a_n+2}{3^{n+1}}, \frac{a_n+1}{3^n}\right].$$

Also sehen wir: $\partial\mathcal{C}_n \subseteq \partial\mathcal{C}_{n+1}$.

Die Aussage der Beobachtung folgt via Induktion aus obiger Argumentation.

a) Da jeder der Mengen C_n kompakt ist, ist auch

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

eine kompakte Menge. Aus $\partial C_n \subseteq \partial C_{n+1}$ folgt weiter

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial C_n \subseteq C.$$

Somit ist, da $|\partial C_n| = 2^{n+1}$ gilt, C eine unendliche Menge.

Behauptung: $\mathring{C} = \emptyset$.

Angenommen, es gibt eine offene Menge $U \subseteq C$. Dann liegt ein offenes Intervall $]a,b[$ in C. Da C der Schnitt der Mengen C_n ist, liegt damit auch $]a,b[$ in C_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also gibt es eine Folge von Intervallen $\left[\frac{b_n}{3^n}, \frac{b_n+1}{3^n}\right] = I_n$ mit $]a,b[\subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$ folgt der Widerspruch, denn die Intervallfolge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$.

Also enthält C keine inneren Punkte und es folgt

$$\mathring{C} = \emptyset, \quad \partial C = C \setminus \mathring{C} = C. \qquad \square$$

b) Beobachtung:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 0 + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Geom. Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}.$$

Somit ist die Darstellung

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

nicht eindeutig.

Argumentiere: $\mathcal{C}_n = \hat{\mathcal{C}}_n$

c) $\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$

d) $x \in \mathcal{C}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$, setze

$$\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

Dies ist wohldef., ~~da~~ und surjektiv auf $[0,1]$, da jede Zahl $\tilde{x} \in [0,1]$ dyadische Darstellung besitzt (die nicht eindeutig ist, daher ist φ nicht injektiv).