Analysis 2
4. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
2. Mai 2011

Anwesenheitsübungen

Lösung 1 Potenzreihen am Rand

Die Reihe $\sum_n x^n$ konvergiert für $x \in]-1,1[$, die Reihe $\sum_n x^n/n$ für $x \in [-1,1[$ und $\sum_n x^n/n^2$ für $x \in [-1,1]$.

Lösung 2

a) Seien $A, B \subseteq X$ kompakt und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $A \cup B$. Wegen $A \subseteq A \cup B$ ist $(U_i)_i$ dann auch einen offene Überdeckung von A. Es gibt also bereits eine endliche Teilüberdeckung von A, d.h. es gibt $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit

$$A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} .$$

Analog können wir für B statt A vorgehen und erhalten eine endliche Teilüberdeckung von B, d.h. es gibt $j_1, \ldots, j_m \in I$ mit

$$B \subseteq U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_m} .$$

Die gemeinsame Teilüberdeckung $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, U_{j_1}, \ldots, U_{j_m})$ ist dann eine endliche Teilüberdeckung von $A \cup B$.

b) Z.B. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}$.

Lösung 3 Rand und Inneres

a) Das Innere ist das entspr. ausgefüllte offene Rechteck. Der Rand besteht aus allen Seiten des Rechtecks. Häufungspunkte sind genau die Punkte des entspr. ausgefüllten, abgeschlossenen Rechtecks. Isolierte Punkte gibt es nicht.

b) Inneres ist die Menge ohne das Nullelement. Der Rand besteht aus Null und dem Einheitskreis. Genau alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ sind Häufungspunkte. Null ist isolierter Punkt.

c) Das Innere ist leer. Der Rand ist ganz $\mathbb{R}$. Häufungspunkte sind genau die Elemente von $\mathbb{R}$. Isolierte Punkte gibt es keine.

d) Inneres ist die Menge selbst. Der Rand ist $\mathbb{R}$. Häufungspunkt sind genau die $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Isolierte Punkte gibt es nicht.

e) Das Innere ist $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |z| < 1\}$. Der Rand ist Null zusammen mit dem Einheitskreis. Häufungspunkte sind genau die Elemente der Menge und Null. Isolierte Punkte gibt es nicht.

f) Das Innere ist leer. Der Rand ist ganz $\mathbb{C}$. Jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist Häufungspunkt. Isolierte Punkte gibt es nicht.

Hausübungen

Lösung 1

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x\sin(x)| \leq |x|$. Nach dem Sandwichtheorem folgt also $\lim_{x\to 0} x\sin(x) = 0$. Durch $f(0) := 0$ lässt sich also f stetig nach 0 fortsetzen.

c) Wir nehmen an, es gibt eine entspr. Reihe $f(x) = \sum_n a_n x^n$. Für jedes $0 \neq k \in \mathbb{N}$ ist $x_k := 1/\pi k$ eine Nullstelle von f. Außerdem ist $(x_k)_k$ eine Nullfolge. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen muss damit $\sum_n a_n x^n$ bereits die Nullreihe sein, d.h. $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass f nicht die Nullfunktion ist.

d) Setze z.B. $z_n := i/n$. Dann ist $(z_n)_n$ eine Nullfolge und für die Folge der Funktionswerte gilt

$$z_n \cdot \sin(1/z_n) = z_n \frac{\exp(i/z_n) - \exp(-i/z_n)}{2i} = \frac{i}{n} \cdot \frac{e^n - e^{-n}}{2i} = \frac{e^n - e^{-n}}{2n} \to \infty \, .$$

Lösung 2

Sei zuerst B kompakt. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschl. Teilmenge, für welcher jeder endliche Schnitt $B \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}$ nicht leer ist. Wir nehmen an, der Schnitt $B \cap \bigcap_{i\in I} A_i$ sei leer und führen dies zum Widerspruch. Für jedes $i \in I$ setze $U_i := X \setminus A_i$. Dann ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen mit

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i \overset{\text{lt. Ann.}}{\supseteq} B \, ,$$

d.h., $(U_i)_i$ ist eine offene Überdeckung von B. Weil B kompakt ist, gibt es eine endliche viele Mengen $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ $(i_1, \dots, i_n \in I)$ mit

$$B \supseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} = (X \setminus A_{i_1}) \cup \dots \cup (X \setminus A_{i)n}) = X \setminus (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) \, .$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass der Schnitt $B \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}$ nicht leer ist.

Der Beweis der umgekehrten Implikation verläuft völlig analog durch Widerspruch und Komplementbildung.

Lösung 3

a)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \, .$$

b) Die Ungleichung gilt, weil alle Summanden in der Definition von $b_m^{(n)}$ positiv sind. Die Gleichheit folgt durch intensives Rechnen mit binomischer Formel

Aus der Ungleichung in a) ergibt sich $\lim_n (1 + \frac{x}{n})^n \leq \exp(x)$. Weiter folgt aus b)

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} b_n^{(m)} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Für $m \to \infty$ ergibt sich damit auch $\exp(x) \leq \lim_n (1 + \frac{x}{n})^n$.