MuLo Übung 3

Aufgabe 1:

a) Aus $\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right| \overset{|\cdot| \text{ stetig}}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2n)!}$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \exp(|z|) \qquad \text{folgt } R = \infty.$$

b) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{n+1}{n} \right| = 1$ folgt $R = \frac{1}{1} = 1.$

c) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt{c_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ folgt $R = \frac{1}{1} = 1.$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4.$$

Also folgt $R = \frac{1}{4}.$

Aufgabe 2

a) Es gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, also $R = \frac{1}{1} = 1$.

b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (n+1-k) \cdot a_k\right) \cdot z^n$$

Damit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ die inverse Potenzreihe darstellt, muß das untere Produkt gleich 1 sein. Wir erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$(0+1-0) \cdot a_0 = 1 \iff a_0 = 1$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (n+1-k) \cdot a_k\right) = 0 \iff a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} (n+1-k) \cdot a_k$$

für alle $n \geq 1$.

Iterativ folgt $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$...

Vermutung: $a_{n+2} = 0$ für alle $n \geq 1$.

Beweis: Induktion. Wir führen hier nur den (IS) durch:

$$a_{n+3} = -\sum_{k=0}^{n+2} (n+4-k) \cdot a_k = -(n+4) + 2(n+3) - (n+2)$$

$$= 2n - 2n + 6 - 6 = 0.$$

Also folgt

$$a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ a_n = 0 \text{ für } n \geq 3.$$

Es gilt also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (z^2 - 2z + 1) = (z-1)^2$.

c) Es gilt auf $\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot z^n = \left((z-1)^2 \right)^{-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Dies ist die bekannte Identität aus Analysis I, Übungsblatt 14.

3a) Ist X eine Menge und ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so ist auch $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X,V) := \{f : X \to V\}$ mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation ein Vektorraum. Dies ist ggf. eine nette Übung zur linearen Algebra.

Wir haben den Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $V = E$. Es ist $B(X,E)$ genau dann ein Vektorraum, wenn $B(X,E)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(X,E)$ ist. Dies zeigen wir:

Sind $f, g \in B(X,E)$, so gibt es ein $C>0$ und $D>0$ mit $\|f(x)\| \leq C$ und $g(x) \leq D$ für alle $x \in X$. Also gilt

$$\|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq C + D.$$

Somit ist auch $f + g \in B(X,E)$.

Ist $f \in B(X,E)$ mit $\|f(x)\| \leq C$, so gilt für ein $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\|(\lambda f)(x)\| = \|\lambda \cdot f(x)\| \leq |\lambda| \cdot \|f(x)\| \leq |\lambda| \cdot C.$$

Also ist $\lambda f \in B(X,E)$. Damit ist $B(X,E)$ UVR.

Weiter ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{B}(X,E)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \{\|f(x)\|\} \geq \|f(x_0)\| \geq 0.$$

Ist $\|f\|_\infty = 0$, so gilt $\|f(x)\| = 0$ für alle $x \in X$, also folgt $f=0$ in $\mathcal{B}(X,E)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} \{\|\lambda f(x)\|\} = \sup_{x\in X} \{|\lambda|\, \|f(x)\|\}$$

$$= \sup_{x\in X} \{\|f(x)\|\} \cdot |\lambda| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.$$

Sind $f, g \in \mathcal{B}(X,E)$, so gilt:

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} \{\|f(x)+g(x)\|\} \leq \sup_{x\in X} \{\|f(x)\| + \|g(x)\|\}$$

$$\leq \sup_{x\in X} \{\|f(x)\|\} + \sup_{x\in X} \{\|g(x)\|\}$$

$$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Beachte, daß für jedes Element $f \in \mathcal{B}(X,E)$ die Zahl $\|f\|_\infty$ existiert, da die Menge

$$\{\|f(x)\| : x \in X\}$$

per Definition von $\mathcal{B}(X,E)$ beschränkt ist.

b) Sei $\|f\|_\infty = C$ und $\|g\|_\infty = D$. Dann gilt:

$$\|f \cdot g\|_\infty = \sup\{|f(x) \cdot g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \sup\{|f(x)| \cdot |g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\leq \sup\{C \cdot |g(x)| : x \in \mathbb{R}$$

$$= C \cdot \|g\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

$f^{**} = f$ folgt aus $\bar{\bar{z}} = z$.

$\|f^*\|_\infty = \|f\|$ folgt aus $|z| = |\bar{z}|$.

$$\|f \cdot f^*\|_\infty = \sup\{|f(x) \cdot \overline{f(x)}| : x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \sup\{|f(x)|^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\leq \|f\|_\infty^2 \quad \text{vgl. H25 Ana I}$$

Für die andere Richtung sei $\varepsilon > 0$* und $x \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| > |\|f\|_\infty - \delta|$ mit $\delta := \frac{1}{2 \cdot \|f\|_\infty} \cdot \varepsilon$. Dann:

$$|f(x)|^2 > (\|f\|_\infty - \delta)^2 = \|f\|_\infty^2 + \delta^2 - 2\delta\|f\|_\infty$$
$$> \|f\|_\infty^2 - 2\delta \cdot \|f\|_\infty > \|f\|_\infty^2 - \varepsilon.$$

*Anmerkung: Es muß gelten: $0 < \varepsilon < \frac{\|f\|_\infty^2}{2}$, aber wir brauchen ja nur hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ für das Argument...

c) Sei $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ und $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Dann:

$$\|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_\infty = \|f_n \cdot g_n - f_n \cdot g + f_n \cdot g - f \cdot g\|_\infty$$

$$\leq \|f_n\|_\infty \cdot \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \cdot \|f_n - f\|_\infty .$$

Da $\|f_n\|_\infty$ gegen $\|f\|_\infty$ konvergiert und die Folgen $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ bzw. $(\|g_n - g\|_\infty)_n$ Nullfolgen sind, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_\infty = 0,$$

also gilt $\lim_{n\to\infty} f_n \cdot g_n = f \cdot g$ glm.

d) Nein, die Aussage wäre falsch:

Setze $f_n(x) := \frac{1}{n}$ und $g_n(x) := \log_{42}(x+1)$.

Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ glm. und $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \log_{42}(x+1)$

glm., aber $\|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_\infty = \infty$.

Insbesondere kann <u>nicht</u> gelten: $\lim_{n\to\infty} f_n \cdot g_n = 0$ glm.

Aufgabe 4:

Aus $F(1) = \sum_{n=0}^\infty f_n > \sum_{n=0}^\infty 1 = \infty$ folgt, daß die Reihe nicht auf $\overline{\mathbb{D}}$ konvergieren kann. Also muß $R \leq 1$ gelten.

Aus Analysis I, Übung 12 wissen wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$$

Somit liefert das Quotientenkriterium für Potenzreihen:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Aus der Rekursionsgleichung $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ folgt sofort:

$$F(z) - z F(z) - z^2 F(z) = (1 - z - z^2) F(z) =$$

$$\sum_{n=0}^\infty f_n z^n - \sum_{n=0}^\infty f_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^\infty f_n \cdot z^{n+2} =$$

$$1 + (f_1 - f_0) \cdot z + \sum_{n=2}^\infty (f_n - f_{n-1} - f_{n-2}) z^n = 1.$$

Also gilt

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Die rationale Funktion

$$F(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

besitzt zwei einfache Pole bei

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z_2-z} - \frac{1}{z_1-z}\right). \end{aligned}$$

Somit gilt die Potenzreihendarstellung

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_2}\cdot\left(\frac{z}{z_2}\right)^n - \frac{1}{z_1}\cdot\left(\frac{z}{z_1}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{z_2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{z_1}\right)^{n+1}\right) z^n\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten also durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{z_2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{z_1}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$