Analysis 2
2. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
18. April 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1

Mit $\sin(z) = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$ einfach durchrechnen.

Aufgabe 2

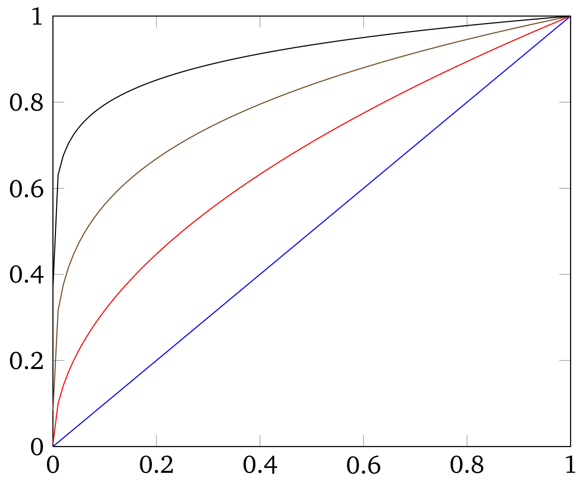
a) Wir haben bereits in Analysis 1 gezeigt, dass für eine Folge $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ die gegen einen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert, auch die Folge der Normen $\left\|(x_n, y_n)\right\|$ gegen $\left\|(x, y)\right\|$ konvergiert. Wegen $f(x, y) = \left\|(x, y)\right\|^2$ folgt daraus die Behauptung.

b) Sei (x_n, y_n) eine gegen (x, y) konvergente Folge in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt insbesondere $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Somit folgt nach dem Grenzwertsatz für die Addition $f(x_n, y_n) = x_n + y_n \to x + y$.

c) Analog mit dem Grenzwertsatz für die Multiplikation.

d) Die Funktion f ist eine Komposition aus den stetigen Funktionen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sin(x)$ und $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

Aufgabe 3

b) 

c) Für $x > 0$ gilt $\lim_n f_n(x) = \lim_n \sqrt[n]{x} = 1$, für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0$. Somit konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > 0, \\ 0 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$

Anhand der Skizze sieht man sofort, dass die Funktionenfolge nicht gleichmäßig gegen f konvergiert, denn $\left\|f_n - f\right\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hausübungen

Aufgabe 1 Was ist 0^0 (für kleine 0)?

a)
$$\lim_{y\to 0} a^y = \lim_{y\to 0} \exp(y\ln a) = \exp(0) = 1\,, \qquad \lim_{x\searrow 0} x^c = \lim_{x\searrow 0} \exp(c\ln x) = \lim_{t\to -\infty} \exp(t) = 0$$

b) f ist als Komposition der stetigen Funktionen exp, ln und der Multiplikation wieder stetig.

c) Nein, denn
$$\lim_{y\searrow 0} \lim_{x\searrow 0} f(x,y) = 0 \neq 1 = \lim_{x\searrow 0} \lim_{y\searrow 0} f(x,y)\,.$$
(Die Funktion $\tilde{f}$ müsste an der Stelle $(0,0)$ also sowohl den Wert 0 als auch den Wert 1 annehmen.)

d) Setze $d := \ln c$. Für $t > 0$ setze weiter $x(t) := e^{-t}$ und $y(t) := -d/t$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0\,,\\ \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{t\to\infty} -d/t = 0\,,\\ \lim_{t\to\infty} \big(x(t)\big)^{y(t)} &= \lim_{t\to\infty} \exp(-d/t\cdot \ln e^{-t}) = \lim_{t\to\infty} \exp\big(-d/t\cdot(-t)\big) = e^d = c\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

a) Für $a \neq 1$ ist $\ln a \neq 0$ und die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto t\cdot\ln a$ ist damit bijektiv. Als Komposition bijektiver Funktionen ist damit auch $\mathbb{R}\to]0,\infty[,\ t\mapsto a^t$ bijektiv.

b) Wir zeigen beispielhaft die obersten beiden Gleichungen: Es gilt nach der Homomorphismus-Eigenschaft der Exponentialfunktion
$$a^{s+t} = \exp\big((s+t)\ln a\big) = \exp(s\ln a + t\ln a) = \exp(s\ln a)\cdot\exp(t\ln a) = a^s\cdot a^t\,.$$
Somit folgt auch
$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log a x}\cdot a^{\log_a y} \overset{\text{Def.}}{=} x\cdot y\,.$$
Aus der Bijektivität der Potenz (bzw. des Logarithmus) folgt damit $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

c) Folgt aus der Logarithmusgleichung der zweiten Zeile mit $x = b$ und $t = \log_b x$.

Aufgabe 3 Wachstum von Potenzen und Logarithmus

a) Für $x > 0$ gilt $e^x = \sum_{k=0}^\infty x^k/k! \geq x^{n+1}/(n+1)!$ und somit
$$0 \leq \frac{x^n}{e^x} \leq \frac{x^n(n+1)!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$
Die Behauptung folgt also aus dem Sandwich-Theorem. Weiter gilt
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{x\to\infty} (-x)^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-1)^n \frac{x^n}{e^x}\,.$$
Die Behauptung $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ folgt deshalb aus $\lim_{x\to\infty} x^n/e^x = 0$.

b) Sei $(x_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge. Setze $y_k := \ln x_k$. Durch die Monotonie des Logarithmus ist y_k monoton fallend und bestimmt divergent mit $y_k \to -\infty$. Weiter gilt
$$x_k^n \ln x_k = e^{n\cdot y_k} y_k = \frac{n\cdot y_k\cdot e^{n\cdot y_k}}{n}\,.$$
Auch die Folge $(ny_k)_k$ ist bestimmt divergent mit $ny_k \to -\infty$. Somit folgt nach dem bereits Gezeigten:
$$\lim_{k\to\infty} x_k^n \ln x_k = 1/n\cdot \lim_{y\to-\infty} y\cdot e^y = 1/n\cdot 0 = 0\,.$$
Außerdem ergibt sich damit auch
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(1/x)}{(1/x)^n} = \lim_{x\searrow 0} -x^n \ln x = 0\,.$$