Analysis 2
MuLo 1. Übung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
12. April 2011

Aufgabe 1 Der Abschluß in metrischen Räumen I

Aus der Vorlesung kennen Sie für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$. Dies ist A vereinigt mit allen Häufungspunkten $x \in X$ von Folgen in A. Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist.

Lösung

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, also eine Folge, deren Folgenglieder allesamt aus der Menge A stammen, und konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, so ist dieser Grenzwert in $\overline{A}$.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{A}$, und konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $x \in X$, so müssen wir zeigen: $x \in \overline{A}$. Wähle nun für jede natürliche Zahl zu jedem Folgenglied x_n ein Element $a_n \in A$ mit $d(x_n, a_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Da jedes Element aus $\overline{A}$ ein Häufungspunkt einer Folge in A ist oder sogar eine Element von A ist, existieren diese Elemente $a_n \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x:
Sei $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^N < \epsilon$.
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > N$ und mit $d(x, x_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$ für alle $n > n_0$. Dann gilt für $n > n_0$:

$$d(x, a_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^N < \epsilon.$$

Damit ist jeder Häufungspunkt von $\overline{A}$ ein Häufungspunkt von A, also ist A abgeschlossen.

Aufgabe 2

a) Sei $A \subseteq B$ und B abgeschlossen.
Ist $a \in \overline{A}$, so existiert eine Folge in A, die gegen a konvergiert. Da $A \subseteq B$ gilt, liegt diese Folge in B. Da B abgeschlossen ist, folgt $a \in B$; also $\overline{A} \subseteq B$.

b) Setze $C := \bigcap \{B \subseteq X : B \text{ abgeschlossen und } A \subseteq B\}$.
Da beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, ist C abgeschlossen.
Aus ~~A~~ a) folgt $\overline{A} \subseteq C$.
Umgekehrt ist $\overline{A}$ eine abgeschlossene Menge, die A enthält. Also gilt

$$C = C \cap \overline{A} \subseteq \overline{A}.$$

Aus beiden Inklusionen folgt $\overline{A} = C$.

Aufgabe 3

a) Sei a ein Häufungspunkt von A. Also existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Aus $A \subseteq B$ folgt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$. Also gilt $a = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{B}$.

b) Seien $A, B \in \mathcal{P}(X)$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konv. Folge aus $A \cap B$ mit Grenzwert $x \in X$. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und eine Folge in B. Also gilt $x \in \overline{A}$ und $x \in \overline{B}$, also $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Es folgt $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Setze $A := \mathbb{Q}$ und $B := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wobei wir $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ als metrischen Raum auffassen (via $d(x,y) := |y-x|$). Hier gilt

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{\mathbb{R} \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} \subsetneq \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cap (\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}})$$

Aufgabe 4

a) Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq \overline{B}$ folgt $A \subseteq \overline{B}$. Also gilt $\overline{B} = A \cup C$ für $C \subseteq X$ geeignet. Aus (A4) folgt $\overline{B} = \overline{A} \cup \overline{C}$, also folgt $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

b) Es gilt $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$. Nach a) gilt also $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ und $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$. Somit folgt $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Aufgabe 5

a) Per Axiom (A1) gilt $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Aus (A2) folgt $X \subseteq \overline{X}$. Da $\overline{X} \in \mathcal{P}(X)$, folgt bereits $X = \overline{X}$.

b) Sei $i_0 \in I$ beliebig. Dann gilt

$$C := \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}.$$

Also gilt $\overline{C} \subseteq A_{i_0}$ für das i_0 nach 4a), denn A_{i_0} ist abgeschlossen. Wir erhalten, da $i_0 \in I$ beliebig war:

$$\overline{C} \subseteq \bigcap_{i_0 \in I} A_{i_0} = C,$$

also ist C abgeschlossen.

c) Aus $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ folgt leicht mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Wahlen $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossener Mengen gilt:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i \in 1}^{n} \overline{A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

also ist $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ebenfalls abgeschlossen.

d) (i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $A \subseteq X$ beliebig. Da (i) gilt, ist die Menge $f^{-1}(\overline{f(A)})$ abgeschlossen in X mit $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$.
Also folgt

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Daraus folgt aber $f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$.
Ist $C \subseteq Y$ abgeschlossen, setze $B := f^{-1}(C)$.
Zu zeigen: $B = \overline{B}$. Mit der Voraussetzung folgt:

$$f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)} = \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

Also folgt

$$\overline{B} \subseteq f^{-1}(f(\overline{B})) \subseteq f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(C))})$$

$$\subseteq f^{-1}(C) = B.$$

Damit ist B abgeschlossen.

Aufgabe 6

a) (A1) folgt daraus, daß es keine Folge in $\emptyset$ gibt. Damit besitzt $\emptyset$ keine Häufungspunkte, die Menge $\overline{\emptyset}$ ist also leer, d.h. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(A2) folgt aus $a \in A \Rightarrow (a)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a. Also $A \subseteq \overline{A}$.

(A3) Ist Aufgabe 1.

(A4) Sei $x \in \overline{A \cup B}$. Damit gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \cup B$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Eine der Mengen

$$N_A := \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in A \}$$

$$N_B := \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in B \}$$

ist nicht endlich. Ist N_C eine unendliche Menge mit $C \in \{A, B\}$, so ist

$$(x_n)_{n \in N_C} \subseteq C$$

eine Folge, die gegen x konvergiert. Also folgt $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Die andere Inklusion ist klar.

b) Folgt direkt daraus, daß 5d) (i) äquivalent ist zu: Das Urbild offener Menge ist offen...

Aufgabe 7

Sei $X = \{1,2\}$. Dann gilt $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Die Funktionswerte $\overline{\emptyset} = \emptyset$ und $\overline{X} = X$ sind festgelegt.

Aus $A \subseteq \overline{A}$ folgt, daß wir folgende Wahlen haben:

$$\overline{\{1\}} = \{1\} \quad \text{oder} \quad \overline{\{1\}} = \{1,2\}$$
$$\overline{\{2\}} = \{2\} \quad \text{oder} \quad \overline{\{2\}} = \{1,2\}.$$

Dies sind insgesamt 4 verschiedene Abschluß-funktionen, wie wir leicht durch Nachrechnen von (A1) bis (A4) feststellen können.

Die Wahl $\overline{\{1\}} = \{1\}$ und $\overline{\{2\}} = \{2\}$ kommt von der diskreten Metrik.

Wir wählen z.B. $\overline{\{1\}} = \{1\}$ und $\overline{\{2\}} = \{1,2\}$.

Wie sehen, wäre $(X, \overline{\cdot})$ metrisch, so gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{2\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Es gibt aber nur eine Folge in $\{2\}$, nämlich

$$x_n = 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir hätten $1 = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$, was in einem metrischen Raum nicht sein kann.