Einführung in die Stochastik
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
01.07.2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Ein Eremit am Südpol hat sich für die einbrechende polare Nacht mit 24 Glühbirnen eingedeckt. Da er sich im Dunkeln unwohl fühlt, will er, dass zu jeder Zeit des halben Nachtjahres eine Birne brennt. Sollte die aktuelle Birne durchbrennen, wird er sie sofort auswechseln. Die polare Nacht dauert 4400 Stunden und der Hersteller der Glühbirnen hat eine exponentialverteilte Haltbarkeit seiner Produkte mit Parameter $\lambda = 1/200$ zugesichert. Während der Eremit die erste Birne einschraubt, beginnen Zweifel an ihm zu nagen…

(a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Haltbarkeit einer solchen Glühbirne.

(b) Sei X_i Zufallsvariable, die die Lebensdauer der i-ten Birne beschreibt. Dann ist

$$Z := \sum_{i=1}^{24} X_i$$

die Zufallsvariable, die den Zeitpunkt beschreibt, an dem die letzte Birne durchbrennt. Bestimmen Sie auch hiervon Erwartungswert und Varianz.

(c) Brennend interessiert den Eremiten die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihm vor Ende der Polarnacht die Glühbirnen ausgehen könnten. Berechnen Sie diese näherungsweise mit dem zentralen Grenzwertsatz.

Lösung:

(a) Für den Erwartungswert und die Varianz einer exponentialverteilten Zufallsvariablen Y mit Parameter $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
EY &= \int_0^\infty x \cdot \lambda \exp(-\lambda \cdot x) \\
&= -x \cdot \exp(-\lambda x)\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty \exp(-\lambda x)dx \\
&= 0 - \frac{1}{\lambda} \cdot \exp(-\lambda x)\Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \\
E(Y^2) &= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \exp(-\lambda \cdot x) \\
&= -x^2 \cdot \exp(-\lambda x)\Big|_{x=0}^{\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda \cdot \exp(-\lambda x)dx \\
&= \frac{2}{\lambda^2} \\
V(Y) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Für die in der Aufgabenstellung definierte Zufallsvariable X erhalten wir also

$$\begin{aligned}
EX &= 200 \\
VX &= 200^2 = 40000
\end{aligned}$$

(b) Wir können davon ausgehen, dass die X_i unabhängig voneinander sind (dies spielt aber erst bei der Varianz eine Rolle). Nach dem ersten Aufgabenteil erhalten wir

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(\sum_{i=1}^{24} X_i) = \sum_{i=1}^{24} E(X_i) = 24 \cdot E(X_1) = 24 \cdot 200 = 4800 \\ V(Z) &= V(\sum_{i=1}^{24} X_i) = \sum_{i=1}^{24} V(X_i) = 24 \cdot V(X_1) = 24 \cdot 200^2 = 960000 \end{aligned}$$

(c) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsvariable

$$Y = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V(X_1)}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - EX_1 \right)$$

näherungsweise $N(0,1)$-verteilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{i=1}^{24} X_i \leq 4400 \right) \\ = \; & P\left(\frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{24} X_i - 200 \leq \frac{1}{24} \cdot 4400 - 200 \right) \\ = \; & P\left(\frac{\sqrt{24}}{200} \left(\frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{24} X_i - 200 \right) \leq \frac{\sqrt{24}}{200} \left(\frac{1}{24} \cdot 4400 - 200 \right) \right) \\ = \; & P\left(Y \leq 2 \cdot \sqrt{6} \left(\frac{11}{12} - 1 \right) \right) \\ = \; & P\left(Y \leq -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \Phi(-\frac{1}{\sqrt{6}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{6}}) \approx 1 - \Phi(0.42) = 0.34 \end{aligned}$$

Mit Wahrscheinlichkeit 0.34 gehen also dem Eremiten während der Polarnacht die Glühbirnen aus.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Ein Flugunternehmen weiß aus Erfahrung, dass im Mittel 7% derjenigen Personen, die ein Flugticket erworben haben, nicht bzw. zu spät zum Abflug erscheinen. Um die Zahl der somit ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen Flug z.B. mit dem A380, bei dem 555 Plätze zu Verfügung stehen, mehr als 555 Flugtickets verkauft.

Wieviele Flugscheine dürfen höchstens verkauft werden, dass mit Wahrscheinlichkeit größer oder gleich 0.95 alle rechtzeitig zum Abflug erscheinenden Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen ?

Hinweis: Betrachten Sie unabhängige $b(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$. Dabei gelte $X_i = 1$ genau dann, falls die Person, die das i-te Flugticket gekauft hat, (rechtzeitig) zum Abflug erscheint und n ist die Anzahl der verkauften Flugtickets. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise dass größte $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 555 \right] \geq 0.95.$$

Lösung: Zur stochastischen Modellierung betrachten wir unabhängige $b(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$. Dabei gelte $X_i = 1$ genau dann, falls die Person, die das i-te Flugticket gekauft hat, (rechtzeitig) zum Abflug erscheint. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Käufer des i-ten Flugtickets (rechtzeitig) zum Abflug erscheint, ist $p = 1 - 0.07 = 0.93$, und n ist die Anzahl der verkauften Flugtickets. Dann gibt $\sum_{i=1}^{n} X_i$ die Anzahl der zum Abflug erschienenen Personen, die ein Flugticket haben, an, und damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erschienenen Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen, gegeben durch

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 555 \right].$$

Gesucht ist dass größte $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 555 \right] \geq 0.95.$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 555\right] \\
&= \mathbf{P}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}X_1 \leq \frac{555}{n} - \mathbf{E}X_1\right] \\
&= \mathbf{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V(X_1)}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}X_1\right) \leq \frac{555 - n\cdot\mathbf{E}X_1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{V(X_1)}}\right].
\end{aligned}
$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz stimmt die letzte Wahrscheinlichkeit approximativ mit

$$
\Phi\left(\frac{555 - n\cdot\mathbf{E}X_1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{V(X_1)}}\right)
$$

überein, wobei Φ die Verteilungsfunktion der $N(0,1)$-Verteilung ist.

Mit

$$
\mathbf{E}X_1 = p,\ V(X_1) = p(1-p) \text{ und } p = 0.93
$$

folgt, dass die obige Bedingung approximativ äquivalent ist zu

$$
\Phi\left(\frac{555 - n\cdot p}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}}\right) \geq 0.95.
$$

Wegen $\Phi(1.65) \approx 0.95$ und der Monotonie von Φ ist dies wiederum genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$
\frac{555 - n\cdot p}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}} \geq 1.65
$$

Quadrieren der letzten Ungleichung liefert die notwendige Bedingung

$$
\frac{(555 - n\cdot p)^2}{n\cdot p\cdot(1-p)} \geq 1.65^2 \tag{1}
$$

Diese impliziert aber nur dann die vorige Bedingung, wenn gleichzeitig

$$
555 - n\cdot p \geq 0,\ \text{d.h. } n \leq \frac{555}{p} = \frac{555}{0.93} \approx 596.8 \tag{2}
$$

gilt.

Ungleichung (1) führt auf

$$
(555 - n\cdot p)^2 \geq 1.65^2 n\cdot p\cdot(1-p)
$$

bzw. auf

$$
555^2 - (1110p + 1.65^2 p\cdot(1-p))\cdot n + p^2 n^2 \geq 0.
$$

Bestimmt man die Nullstellen des quadratischen Polynoms auf der linken Seite, so erhält man

$$
n_1 \approx 585.8 \text{ und } n_2 \approx 607.9
$$

Also ist die obige Ungleichung erfüllt für $n \leq 585$ oder $n \geq 608$.

Unter Berücksichtigung von $n \leq 596.8$ (vgl. (2)) erhält man als Resultat: Es dürfen höchstens 585 Flugtickets verkauft werden, damit mit Wahrscheinlichkeit größer oder gleich 0.95 alle rechtzeitig zum Abflug erschienenen Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen.

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch auf $[\theta, 2\theta]$ gleichverteilt, d.h. sie sind unabhängig und besitzen (jeweils) eine Dichte $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{für} \quad \theta \leq x \leq 2\theta, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin [\theta, 2\theta]. \end{cases}$$

Hierbei ist $\theta \in \mathbb{R}_+$ ein Parameter der Dichte f_θ.

(a) Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{2}{3 \cdot n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

(b) Ist der Schätzer in a) auch konsistent ? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung: a)

$$\begin{aligned} EX_1 &= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx \\ &= \int_{\theta}^{2\theta} x \cdot \frac{1}{\theta} dx \\ &= \frac{3}{2}\theta. \end{aligned}$$

$T_n(X_1, \ldots, X_n)$ ist erwartungstreuer Schätzer für θ,da

$$\begin{aligned} E_\theta \left[T_n(X_1, \ldots, X_n) \right] &= E_\theta \left[\frac{2}{3 \cdot n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right] \\ &= \frac{2}{3 \cdot n} E_\theta \left[X_1 \right] \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

für alle $\theta > 0$.

b) Der Schätzer ist auch konsistent, da nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt:

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{f.s.} \frac{2}{3} \cdot E_\theta(X_1) = \theta$$

für alle $\theta > 0$.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Die Parkdauer eines Kraftfahrzeuges in einem bestimmten Parkhaus wird durch eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvarible X beschrieben. Für die mittlere Parkdauer μ soll ein Konfidenzintervall bestimmt werden dessen Konfidenzniveau gleich $1 - \alpha = 0,95$ sein soll. Bei 100 Messungen, die durch unabhängige identisch wie X verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots X_{100}$ beschrieben werden, ergaben sich der empirische Mittelwert $\bar{x} = 1,61$ und die empirische Varianz $s^2 = 2,72$.

Hinweis: 1)Bei dem Problem der Punktschätzung konstruierte man einen Schätzer $T_n\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ von $g(\theta_0)$. Bei dem Problem der Bereichschätzung konstruiert man einen möglichst kleinen Bereich, sodass $g(\theta_0)$ mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit in diesem Bereich liegt. Daher folgende Definition:

a)$C(X_1, \ldots, X_n)$ heißt Konfidenzbereich zum Konfidenzniveau $1-\alpha$, falls für alle $\theta \in \Theta$ und alle unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $\mathbf{P}_{X_1} = w_\theta$ gilt: $\mathbf{P}\left[g(\theta) \in C(X_1, \ldots, X_n)\right] \geq 1-\alpha$. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite existiert.

b) Ist $C(X_1, \ldots, X_n)$ in a) ein Intervall, dann heißt $C(X_1, \ldots, X_n)$ Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

Die Idee bei der Konstruktion ist die folgende: Man konstruiert eine Zufallsvariable $Q = Q(X_1, ..., X_n, g(\theta_0))$, die von $X_1, ..., X_n$ und $g(\theta_0)$ abhängt derart, dass die Verteilung dieser Zufallsvariablen Q im Falle $\mathbf{P}_{X_1} = w_{\theta_0}$ nicht von $\theta_0 \in \Theta$ abhängt. Eine solche Zufallsvariable bezeichnet man als stochastisches Pivot. Anschließend wählt man dann eine Menge B mit $\mathbf{P}[Q \in B] = 1 - \alpha$,und formt $Q(X_1, ..., X_n, g(\theta_0)) \in B$ um zu $g(\theta_0) \in C(X_1, ..., X_n)$.

2)Die Varianz sei bekannt und es gilt $\sigma^2 = s^2$.

Lösung: Aus der Vorlesung folgt, dass die Zufallsvariable

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)$$

standarnormalverteilt ist. Es gilt auch:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\right| \leq u_{\frac{\alpha}{2}}\right] &= \mathbf{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \leq u_{\frac{\alpha}{2}}\right] - \mathbf{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) < -u_{\frac{\alpha}{2}}\right] \\
&= \phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \phi\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha,
\end{aligned}$$

wobei ϕ die Verteilungsfunktion von $\mathrm{N}(0,1)$ ist. Mit

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\right| \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \\
&\Leftrightarrow -u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \\
&\Leftrightarrow -u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\mu - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

ist der Konfidenzintervall für μ zum Niveau 0,95:

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Ersetzt man σ durch s und setzt man sonstige Werte ein, so bekommt man einen Konfidenzintervall:

$$[1.2867, 1.9333].$$

Dieses Übungsblatt wird im Rahmen der Übungen am 04. bzw. 05.07.2011 besprochen. Ihre Ausarbeitung geben Sie am 11. bzw. 12.07.2011 in Ihrer Übungsgruppe ab. Sie erhalten diese in den Sprechstunden Ihrer Übungsleiter oder bei den zuständigen Mitarbeitern zurück.