Einführung in die Stochastik
9. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
24.06.2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 6 \cdot x \cdot (1-x) & 0 \le x \le 1, \\ 0 & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

sei Dichte einer Zufallsvariablen Y. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Lösung:

$$\begin{aligned}
EY &= \int x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x) dx \\
&= \int_0^1 6x^2 dx - \int_0^1 6x^3 dx = 2x^3 \Big|_{x=0}^1 - \frac{3}{2} x^4 \Big|_{x=0}^1 \\
&= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\
E(Y^2) &= \int x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) dx \\
&= \int_0^1 6x^3 dx - \int_0^1 6x^4 dx = \frac{3}{2} x^4 \Big|_{x=0}^1 - \frac{6}{5} x^5 \Big|_{x=0}^1 \\
&= \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{10} \\
V(Y) &= E\left((Y - EY)^2\right) = E\left(Y^2 - 2YEY + (EY)^2\right) \\
&= E\left(Y^2\right) - 2(EY)^2 + (EY)^2 = E\left(Y^2\right) - (EY)^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Zehn perfekten Schützen stehen zehn unschuldige Enten gegenüber. Jeder Schütze wählt zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen eine Ente aus, auf die er schießt. Sei X die zufällige Zahl der überlebenden Enten. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

Hinweis: Man kann die Zufallsvariable X schreiben als

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{Ente } i \text{ überlebt,} \\ 0 & \text{Ente } i \text{ nicht überlebt,} \end{cases}$$

Lösung: Da jeder Schütze zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen die Ente auswählt, auf die er schießt, gilt

$$\begin{aligned} P\left\{X_i = 1\right\} &= P\left\{\text{Schütze 1 ziehlt nicht auf Ente i}, \ldots, \text{Schütze n ziehlt nicht auf Ente i}\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{10} P\left\{\text{Schütze j ziehlt nicht auf Ente i}\right\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$E\left(X_i\right) = 0 \cdot P\left\{X_i = 0\right\} + 1 \cdot P\left\{X_i = 1\right\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}.$$

Wegen der Linearität des Erwartungswerts erhalten wir dann

$$\begin{aligned} E\left(X\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) \\ &= 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 3.49. \end{aligned}$$

Es gilt

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2.$$

Da wir EX schon kennen, genügt es also $E(X^2)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} X_i X_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{10}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{10} E(X_i X_j) + \sum_{i=1}^{10} E(X_i^2) \\ &= 90 \cdot E(X_1 X_2) + 10 \cdot E(X_1^2). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit das ein fest gewählter Schütze weder auf die erste noch auf die zweite Ente zielt ist $\frac{8}{10}$. Da die Schützen sich unabhängig voneinander entscheiden, auf welche Ente sie zielen, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{10}$$

für das Ereignis „Keiner der Schützen zielt auf Ente 1 oder Ente 2 “ .

$$E(X_1 X_2) = 1 \cdot P[X_1 \cdot X_2 = 1] = \left(\frac{8}{10}\right)^{10}.$$

Da X_1 nur die Werte Eins und Null annimmt, ist $E(X_1^2) = E(X_1) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$. Wir erhalten also

$$V(X) = 90 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} - \left(10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right)^2 \approx 0.99.$$

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Beim Roulettespiel wird zufällig eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ ausgewählt. Dabei sind die Zahlen zusätzliche mit Farben markiert: Die Null ist grün, die Zahlen

$$2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35$$

sind schwarz und die restlichen Rot. Als Spieler hat man u.A. die Möglichkeiten: Setzen auf Rot und setzen auf Ungerade. In beiden Fällen erhält man im Erfolgsfall (d.h. eine rote Zahl bzw. eine ungerade Zahl wird ausgewählt) den doppelten Einsatz. Im Falle einer schwarzen Zahl bzw. einer geraden Zahl, die nicht Null ist, verliert man den eingesetzten Betrag. Im Falle der Null existieren verschiedene Spielarten. Wir gehen hier davon aus, dass man die Hälfte des Einsatzes verliert.

(a) Definieren Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments einen Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$.

(b) Definieren Sie mit der Grundmenge aus Teil (a) eine Zufallsvariable X, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz von einer Geldeinheit auf Rot modelliert und eine Zufallsvariable Y, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz einer Geldeinheit auf Ungerade modelliert.

(c) Bestimmen Sie die Varianz der beiden folgenden Spielstrategien:
   i. Setzen von zwei Geldeinheiten auf Rot.
   ii. Setzen von einer Geldeinheit auf Rot und einer Geldeinheit auf Ungerade.

Lösung:

(a) Es handelt sich um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ und

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A}{37}.$$

(b)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,12,14,16,18,19,21,23,25,27,30,32,34,36\} \\ -1, & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,11,13,15,17,20,22,24,26,28,29,31,33,35\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35\} \\ -1, & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

(c) Sei $Z = X + Y$. Gesucht ist also $Var(2X)$ und $Var(Z)$. Es gilt

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,19,21,23,25,27\} \\ 0 & \text{falls } \omega \in \{11,12,13,14,15,16,,17,18,29,30,31,32,33,34,35,36\} \\ -1 & \text{falls } \omega \in \{0\} \\ -2 & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,20,22,24,26,28\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= -1 \cdot P[X=-1] - \frac{1}{2}P[X=-\frac{1}{2}] + 1 \cdot P[X=1] = -\frac{1}{2 \cdot 37} = -\frac{1}{74} \\
Var(X) &= E(|X - EX|^2) \\
&= (-1 + \frac{1}{74})^2 \cdot P[X=-1] + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{74})^2 \cdot P[X=-\frac{1}{2}] + (1 + \frac{1}{74})^2 \cdot P[X=1] \\
&= \frac{1341}{1369} \approx 0.9795 \\
Var(2X) &= 4 \cdot \frac{1341}{1369} \approx 3.9182 \\
E(Z) &= E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -\frac{1}{37} \\
E(Z^2) &= 4 \cdot P(Z=2) + P(Z=0) + 4 \cdot P(Z=-2) = 4 \cdot \frac{10}{37} + \frac{1}{37} + 4 \cdot \frac{10}{37} = \frac{81}{37} \\
Var(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{81}{37} - \frac{1}{37^2} \approx 2.19
\end{aligned}$$

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Ein Glücksrad bleibt nach dem Drehen rein zufällig auf einem von insgesamt 50 Feldern stehen. Bleibt es auf einem der 10 blau gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 5 Euro ausgezahlt. Bleibt es auf einem der 5 grün gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 10 Euro ausgezahlt. Und bleibt es auf dem *einzigen* roten Feld stehen, so wird ein Gewinn von 100 Euro ausgezahlt. Auf den übrigen 34 weiß gefärbten Feldern wird kein Gewinn ausgezahlt.

(a) Wie groß ist der Gewinn "im Mittel", und wie groß ist die "mittlere quadratische Abweichung" zwischen dem zufälligen Gewinn und dem Gewinn "im Mittel" ?

(b) Für einmaliges Drehen verlangt der Besitzer des Glücksrads einen Einsatz von 5 Euro. Damit beträgt sein Verdienst bei einmaligen Drehen $Y = 5 - X$, wobei X der ausgezahlte Gewinn ist. Wie groß ist sein Verdienst "im Mittel", und wie groß ist die "mittlere quadratische Abweichung" zwischen dem zufälligen Verdienst und dem Verdienst "im Mittel"?

Lösung:

(a) Als zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum betrachten wir $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ mit

$$\Omega = \{\text{weiß}, \text{blau}, \text{grün}, \text{rot}\}$$

und

$$P(A) = \frac{17}{25} \cdot 1_A(\text{weiß}) + \frac{1}{5} \cdot 1_A(\text{blau}) + \frac{1}{10} \cdot 1_A(\text{grün}) + \frac{1}{50} \cdot 1_A(\text{rot}).$$

Als nächstes definieren wir die Zufallsvariable X, die den Gewinn in Euro bei dem beschriebenen Glücksradspiel beschreibt. Man erhält

ω	weiSS	blau	grün	rot
$X(\omega)$	0	5	10	100
$P(X \in \{\omega\})$	$\frac{17}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{50}$

Der Gewinn im Mittel ist dann gerade der Erwartungswert der Zufallsvariable X, bei der mittleren quadratischen Abweichung handelt es sich um die Varianz.

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 5 \cdot P(X=5) + 10 \cdot P(X=10) + 100 \cdot P(X=100) \\
&= 5 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{1}{10} + 100 \cdot \frac{1}{50} = 4 \\
E(X^2) &= 0^2 \cdot P(X=0) + 5^2 \cdot P(X=5) + 10^2 \cdot P(X=10) + 100^2 \cdot P(X=100) \\
&= 25 \cdot \frac{1}{5} + 100 \cdot \frac{1}{10} + 100^2 \cdot \frac{1}{50} = 215 \\
V(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = 215 - 4^2 = 199
\end{aligned}$$

(b) Die Zufallsvariable X aus der Aufgabenstellung entspricht der Zufallsvariabe X aus der Lösung von Aufgabenteil a).

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(5-X) = E(5) - E(X) = 5 - 4 = 1 \\
V(Y) &= V(5-X) = V(-X) = V(X) = 199
\end{aligned}$$

Dieses Übungsblatt wird im Rahmen der Übungen am 27. bzw. 28.06.2011 besprochen. Ihre Ausarbeitungen geben Sie am 04. bzw. 05.07.2011 in Ihrere Übungsgruppe ab. Sie erhalten diese am 11. bzw. 12.07.2011 korrigiert zurück.