Einführung in die Stochastik
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
17.06.2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Erwartungswert einer $b(n,p)$-verteilten Zufallsvariablen X und einer $\pi(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen Y.

Hinweis: Zeigen Sie: Für $k > 0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Lösung: Zeige erstmal den Hinweis:

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Da X eine diskrete Zufallsvariable mit Zähldichte

$$p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{, falls } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

ist, gilt nach Vorlesung

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= = np(p + (1-p))^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

Die Zufallsvariabel Y hat die Zähldichte

$$p_k = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) & \text{, falls } 0 \le k \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Y &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \\
&= \exp(-\lambda)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.
\end{aligned}$$

Aufgabe 30 (4 Punkte)

An einem Flughafen wird für das Abstellen eines Autos für x Minuten die Gebühr

$$h(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 \leq x \leq 60 \\ \frac{x}{6} & \text{für } 60 < x < 600 \\ 800 & \text{für } x \geq 600 \end{cases}$$

verlangt. (Im Falle $x \geq 600$ wird das Auto abgeschleppt.)

Student S. holt seine Oma vom Flughafen ab. Dazu fährt er exakt zur geplanten Ankunftszeit des Flugzeugs in den Parkplatz ein. Leider hat das Flugzeug X Minuten Verspätung, wobei X eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist. Dabei erreicht er die Parkaufsicht, bei der er die Gebühr bezahlen muss, erst wieder nach $X + 30$ Minuten. Wie groß ist im Mittel die Gebühr, die Student S. bezahlen muss?

Hinweis: Berechnet werden soll

$$\mathbf{E}(h(X+30))$$

wobei X eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist.

Lösung: Es gilt

$$h(x+30) = \begin{cases} 10 & \text{, falls } -30 \leq x \leq 30 \\ \frac{x+30}{6}\text{, falls } 30 < x < 570 \\ 800\text{, falls } x > 570 \end{cases}$$

Da X exponentialverteilt mit Parameter λ ist (also stetig verteilt), gilt nach der Vorlesung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(h(X+30)) &= \int h(x+30) \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^\infty h(x+30) \lambda \exp(-\lambda x) dx \\ &= \int_0^{30} 10\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{30}^{570} \frac{x+30}{6} \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{570}^\infty 800 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 10 - e^{-30\lambda} + \frac{1}{6} \cdot \frac{60e^{-30\lambda} + e^{-30\lambda} - 600e^{-570\lambda} - e^{-570\lambda}}{\lambda} \\ &\quad + \lim_{c\to\infty} 800 \cdot (-e{-}\lambda c + e^{-570\lambda}) \\ &= 10 + \frac{1}{6\lambda} \cdot e^{-30\lambda} - 100 \cdot e^{-570\lambda} - \frac{1}{6\lambda} \cdot e^{-570\lambda} + 800 \cdot e^{-570\lambda}. \end{aligned}$$

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Jedesmal, wenn Professor K. eine Gruppe von fünf Personen trifft, wettet er hundert Euro, dass mindestens zwei von diesen fünf Personen im gleichen Monat Geburtstag haben. Wie groß ist der mittlere Gewinn bzw. Verlust bei diesem Spiel?

Lösung: Um den erwarteten Gewinn oder Verlust bei dieser Wette zu berechnen, braucht man erstmal die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "Mindestens zwei der fünf Studenten haben ihr Geburtstag im gleichen Monat“ Diese berechnet man aus der Gegenwahrscheinlichkeit. Also: wie wahrscheinlich ist es, dass alle 5 Personen in verschiedenen Monaten Geburtstag haben?

(a) Die 1. Person kann sich den Monat aus 12 Monaten auswählen
(b) Die 2. Person kann sich den Monat aus 11 Monaten auswählen
(c) Die 3. Person kann sich den Monat aus 10 Monaten auswählen - und so weiter

Die Gegenwahrscheinlichkeit ist:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12} = 0.38194$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demzufolge

$$1 - 0.38194 = 0.61806$$

Der mittlere Gewinn, der der Professor K. beim Abschließen der Wette bekommt, beläuft sich auf:

$$€100 \cdot 0.61806 - €100 \cdot 0.38194 = €61.806 - €38.194 = €23.61$$

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Eine Versicherung investiert einen Teil ihrer Rücklagen in einen Immobilienfond. Aus Erfahrung weiß die Versicherung, dass der für 1 Euro erzielte zukünftige Erlös beschrieben wird durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{10-x}{45} & 1 < x \leq 10, \\ 0 & x < 0 \text{ oder } x > 10. \end{cases}$$

(a) Wie groß ist der "mittlere" zukünftige Erlös?

(b) In der Bilanz des Unternehmens kann der heutige Wert der Investition eines Euros in den Immobilienfond berücksichtigt werden durch den *Value at Risk*, d.h. durch denjenigen Wert, den der zukünftige Erlös genau mit Wahrscheinlichkeit 0.95 überschreitet. Bestimmen Sie diesen Wert.

(c) Statt dem Value at Risk wird nun der Wert 0.8 in der Bilanz des Unternehmens zur Beschreibung des heutigen Wertes der Investition eines Euros in den Immobilienfond verwendet. Um eine Aussage darüber zu bekommen, wie stark dieser Wert im Mittel unterschritten wird, falls der Fall eintritt, dass er wirklich unterschritten wird, kann der sogenannte *expected shortfall* berechnet werden. Dies ist der mittlere Wert von X der sich ergibt, falls 0.8 unterschritten wird. Dieser Wert kann berechnet werden gemäß

$$\frac{E\left[X \cdot 1_{[X<0.8]}\right]}{P[X < 0.8]} := \frac{E[h(X)]}{P[X < 0.8]}$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist gemäß

$$h(x) = \begin{cases} x & x < 0.8, \\ 0 & x \geq 0.8. \end{cases}$$

Berechnen Sie diesen Wert.

Lösung:

(a) Der mittlere Erlös ist der Erwartungswert der Zufallsvariable.

$$\begin{aligned} EX &= \int x \cdot f(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{10} x^3 dx + \int_1^{10} \frac{10x - x^2}{45} dx \\ &= \frac{3}{10 \cdot 4} x^4 \Big|_{x=0}^1 + \frac{5x^2 - \frac{1}{3}x^3}{45} \Big|_{x=1}^{10} \\ &= \frac{3}{40} + \frac{500 - \frac{1}{3} \cdot 1000 - 5 + \frac{1}{3}}{45} \\ &= \frac{3}{40} + \frac{162}{45} = \frac{3}{40} - \frac{18}{5} = \frac{147}{40} \end{aligned}$$

(b) Für den Value at Risk VaR gilt

$$P[X > VaR] = 0.95.$$

Dies ist äquivalent mit

$$F(VaR) = P[X \leq VaR] = \frac{1}{20}.$$

Für $0 < t < 1$ gilt

$$F(t) = \int_0^t \frac{3}{10} x^2 dx = \frac{1}{10} x^3$$

und wegen $F(0) = 0 < \frac{1}{20} < \frac{1}{10} = F(1)$ gilt für den VaR:

$$\begin{aligned} \frac{1}{20} &= \frac{1}{10}(VaR)^3 \\ \Leftrightarrow \quad VaR &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.8 \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{E[X \cdot 1_{[X<0.8]}]}{P[X < 0.8]} = 20 \cdot \int_0^{0.8} x \cdot f(x)dx = 20 \cdot 0.03072 = 0.6144.$$

Dieses Übungsblatt wird im Rahmen der Übungen am 20. bzw. 21.06.2011 besprochen. Ihre Ausarbeitungen geben Sie am 27. bzw. 28.06.2011 in Ihrere Übungsgruppe ab. Sie erhalten diese am 04. bzw. 05.07.2011 korrigiert zurück.

Information der Fachschaft & Studienberatung Mathematik

Liebe Studierende der Mathematik,

wir - die Fachschaft und die Studienberatung Mathematik - möchten euch hiermit zu den **Wahlpflichtorientierungstagen 2011** einladen. Ziel dieser Veranstaltung ist es, euch über Wahlpflicht- und Vertiefungsbereich in Bachelor und Master zu informieren, sowie bei der Erstellung von Prüfungsplänen zu unterstützen. Dazu werden zunächst am

Montag, den 27. Juni um 15:20 Uhr in S103-23

Herr Weiß und Prof. Kiehl in entsprechenden Vorträgen die Formalitäten des Bachelor und Master Studiums erläutern, bevor im Anschluss im selben Raum um 16:45 Uhr alle 7 Arbeitsgruppen des Fachbereiches jeweils in einem 10 minütigen Vortrag kurz die in den kommenden Semestern angebotenen Vertiefungen vorstellen werden. Weiterführend wird es am

Donnerstag, den 30. Juni um 15:20 Uhr in S102-036 und S102-36

eine AG-Messe geben, bei welcher ihr mit den Arbeitsgruppen direkt ins Gespräch kommen und persönliche Fragen diskutieren könnt. Abschließend habt ihr ab 16:05 Uhr die Möglichkeit in Kleingruppen zusammen mit studentischen Tutoren euren eigenen Bachelor und/oder Master Prüfungsplan zu erstellen. Außerdem wird Prof. Kiehl während dieses letzten Blockes verfügbar sein, den neu angefertigten Plan direkt zu genehmigen.

Dank dieses Programmes stellen die Wahlpflichtorientierungstage eine einmalige Gelegenheit dar, sich einen Überblick über die in den kommenden Semestern geplanten Vertiefungen zu verschaffen und das eigene Studium individuell zu planen - also nehmt dieses Angebot wahr!