Einführung in die Stochastik
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
1. Juni 2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Die Zuverlässigkeit einer Tuberkulose (Tbc)-Röntgenuntersuchung sei durch folgende Angaben gekennzeichnet:

- 90 % der Tbc-kranken Personen werden durch Röntgen entdeckt
- 99 % der Tbc-freien Personen werden als solche erkannt.

Aus einer großen Bevölkerung, von der 0.1% Tbc-krank sind, wird nun eine zufällig herausgegriffene Person geröntgt un als Tbc-verdächtig eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person wirklich Tbc-krank ist?

Lösung: Wir definieren die Ereignisse
A: Patient ist krank
B: Patient wird als krank erkannt.

Dann gilt

$$P(A) = 0.001, \qquad P(B|A) = 0.9$$

und somit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = 0,083$$

Aufgabe 26 (4 Punkte)

(a) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ mit

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Zeigen Sie:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Hinweis: Formen Sie die rechte Seite mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit um.

(b) Student S. hat das Passwort für seinen Rechnerzugang vergessen. Er erinnert sich gerade noch, dass es aus genau 8 Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ besteht. Er versucht nun, durch zufällige Eingabe 8–stelliger Zahlen das Passwort zu erraten. Da er sich alle bereits eingegebenen Zahlen notiert, tippt er keine Zahl doppelt ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der n–ten Eingabe einer 8–stelligen Zahl das Passwort findet ($n \in \mathbb{N}$ fest).
Hinweis: Gefragt ist nach

$$\mathbf{P}(B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c \cap B_n),$$

wobei B_i das Ereignis ist, dass der Student bei der i–ten Eingabe das richtige Passwort eintippt.

Lösung:

(a) $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ W-Raum, $A_n, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ mit $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. **Zu zeigen:**

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_3|(A_2 \cap A_1)) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})) \\
&= \mathbf{P}(A_1) \cdot \tfrac{\mathbf{P}(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot \tfrac{\mathbf{P}(A_3 \cap (A_2 \cap A_1))}{\mathbf{P}(A_2 \cap A_1)} \cdot \ldots \cdot \tfrac{\mathbf{P}(A_n \cap (A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}))}{\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})} \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n).
\end{aligned}$$

(b) $B_i \mathrel{\widehat{=}}$ richtiges Passwort bei i-ter Eingabe.
Gesucht:

$$\mathbf{P}(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n)$$

Es gilt nach a)

$$\mathbf{P}(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n) = \mathbf{P}(B_1^c) \cdot \mathbf{P}(B_2^c|B_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(B_n|(B_n^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c)$$

und es gilt wegen dem Aufschrieb aller schon bekannten Passwörter

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(B_1^c) = \tfrac{10^8-1}{10^8} \\
&\mathbf{P}(B_2^c|B_1^c) = \tfrac{10^8-2}{10^8-1} \\
&\quad\vdots \\
&\mathbf{P}(B_{n-1}^c|(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-2}^c)) = \tfrac{10^8-(n-1)}{10^8-(n-2)}.
\end{aligned}$$

somit folgt für $n \leq 10^8$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n) &= \tfrac{10^8-1}{10^8} \cdot \tfrac{10^8-2}{10^8-1} \cdot \ldots \cdot \tfrac{10^8-(n-1)}{10^8-(n-2)} \cdot \tfrac{1}{10^8-(n-1)} \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{10^8}}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass dann die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A, B sind unabhängig, d.h. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

(b) $1_A, 1_B$ sind unabhängig, d.h. für alle $C_1, C_2 \in \mathscr{B}$ gilt

$$\mathbf{P}\left[1_A \in C_1, 1_B \in C_2\right] = \mathbf{P}\left[1_A \in C_1\right] \cdot \mathbf{P}\left[1_B \in C_2\right].$$

Hinweis: Für $C_1 \in \mathscr{B}$ gilt immer

$$1_A^{-1}(C_1) \in \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Machen Sie sich damit klar, dass es genügt zu zeigen: Mit A, B sind auch A^c, B unabhängig. Verwenden Sie dazu

$$A^c \cap B = B \setminus (A \cap B).$$

Lösung: Sind $1_A, 1_B$ unabhängig, so folgt:

$$\mathbf{P}[A, B] = \mathbf{P}[1_A \in \{1\}, 1_B \in \{1\}] \overset{Vor.}{=} \mathbf{P}[1_A \in \{1\}] \cdot \mathbf{P}[1_B \in \{1\}] = \mathbf{P}[A] \cdot \mathbf{P}[B].$$

Sei jetzt A, B unabhängig. Für Mengen $C \in \mathscr{A}, D \in \mathscr{B}$ gilt:

$$1_C^{-1}(D) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } 0, 1 \notin D \\ C & \text{falls } 1 \in D, 0 \notin D \\ C^c & \text{für } 0 \in D, 1 \notin D \\ \Omega & \text{für } 0, 1 \in D \end{cases}$$

und somit $1_C^{-1}(D) \in \{\emptyset, C, C^c, \Omega\}$.

Für $1_A^{-1}(C_1) \in \{\emptyset, \Omega\}$ oder $1_B^{-1}(C_2) \in \{\emptyset, \Omega\}$ ist die Behauptung trivial. Denn gilt beispielsweise $1_A(C_1)^{-1} = \Omega$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[1_A \in C_1, 1_B \in C_2] &= P[\Omega \cap B^{-1}(C_2)] = \mathbf{P}[B^{-1}(C_2)] \\ &= 1 \cdot P[1_B \in C_2] = \mathbf{P}(\Omega) \cdot \mathbf{P}[1_B \in C_2] = \mathbf{P}[1_A \in C_1] \cdot \mathbf{P}[1_B \in C_2]. \end{aligned}$$

Wegen $A^c \cap B = B \setminus (A \cap B)$ folgt zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[A^c \cap B] &= \mathbf{P}[B \setminus (A \cap B)] = \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A \cap B] \\ &\overset{\text{A,B unabhängig}}{=} \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A] \cdot \mathbf{P}[B] = \mathbf{P}[B] \cdot (1 - \mathbf{P}[A]) = \mathbf{P}[B] \cdot \mathbf{P}[A^c]. \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigketi von A, B folgt also die Unabhängigkeit von A^c, B und aus Symmetriegründen die Unabhängigkeit von A, B^c. Ist aber A, B^c unabhängig folgt jetzt unmittelbar, dass auch A^c, B^c unabhängig ist.

Durch Abarbeiten der verbleibenden Möglichkeiten folgt daraus die Behauptung. Exemplarisch zeigen wir hier den Fall $1_A^{-1}(C_1) = A^c, 1_B^{-1}(C_2) = B^c$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[1_A \in C_1, 1_B \in C_2] &= \mathbf{P}[1_A^{-1}(C_1), 1_B^{-1}(C_2)] = \mathbf{P}[A^c, B^c] \overset{s.o.}{=} \mathbf{P}[A^c] \cdot \mathbf{P}[B^c] \\ &= \mathbf{P}[1_A^{-1}(C_1)] \cdot \mathbf{P}[1_B^{-1}(C_2)] = \mathbf{P}[1_A \in C_1] \cdot \mathbf{P}[1_B \in C_2]. \end{aligned}$$

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Eine Versicherung investiert einen Teil ihrer Rücklagen in einen Immobilienfond. Aus Erfahrung weiß die Versicherung, dass der für 1 Euro erzielte zukünftige Erlös beschrieben wird durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{9}{10} \cdot x^{-2} & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die zur Dichte f gehörende Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) du.$$

(b) Berechnen Sie (Skizze von F verwenden!) den Value at Risk, d.h. denjenigen Wert $VaR \in \mathbb{R}$, für den gilt

$$F(VaR) = 0.05.$$

(c) Interpretieren Sie den VaR anschaulich.
Hinweis: Ist X stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte f, was gilt dann für die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}[X \leq VaR] \text{ bzw. } \mathbf{P}[X > VaR]?$$

Lösung:

(a) Für $x < 0$ ist $F(x) = 0$. Falls $0 \leq x \leq 1$ erhalten wir

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_{0}^{x} \frac{t}{5} dt = \frac{1}{10} \cdot x^2.$$

Für den Fall $x > 1$ erhält man entsprechend

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_{0}^{1} f(t) dt + \int_{1}^{x} f(t) dt = 1 - \frac{9}{10x}.$$

Insgesamt ergibt dies:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < 0 \\ \frac{1}{10} x^2 & \text{, falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{9}{10 \cdot x} & \end{cases}$$

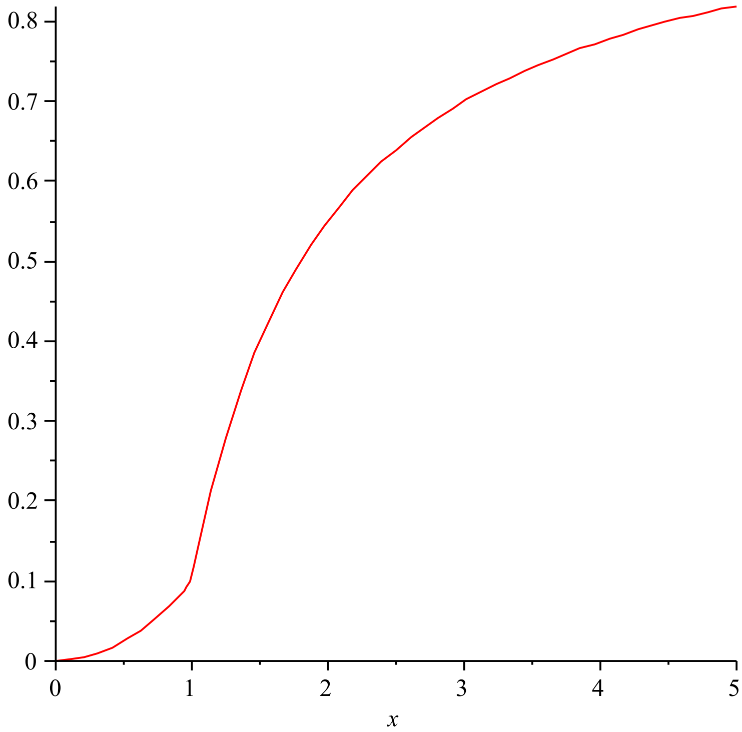

Abbildung 1: Abbildung zur Lösung von Aufgabe 26 a).

(b) In der Skizze sieht man, dass aus $F(VaR) = 0,05$ folgt, dass $0 \leq VaR \leq 1$.
Somit

$$\begin{aligned} F(VaR) &= \frac{VaR^2}{10} \overset{!}{=} 0,05 \\ &\Rightarrow VaR^2 = 0,5 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also $VaR = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Es gilt

$$P[X \leq VaR] = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{u}{5} du = \frac{u^2}{10} \bigg|_{u=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1/2}{10} = \frac{1}{20} \mathrel{\widehat{=}} 5\%$$

$$\Rightarrow P[X > VaR] = 1 - P(X \leq VaR) = \frac{15}{20} \mathrel{\widehat{=}} 95\%.$$

Anschaulich ist VaR somit der Wert, der mit 95 % Wahrscheinlichkeit überschritten wird.