Einführung in die Stochastik
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
23. Mai 2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 21 (4 Punkte)

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine S–Bahn Verspätung hat, betrage 0.30. Sofern die S–Bahn Verspätung hat, kommt Student S. nur mit Wahrscheinlichkeit 0.2 pünktlich zur Vorlesung. Sofern die S–Bahn aber keine Verspätung hat, kommt er mit Wahrscheinlichkeit 0.99 pünktlich zur Vorlesung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. pünktlich zur Vorlesung kommt?

(b) Eine Klausur wird von einem gut vorbereiteten Studenten mit Wahrscheinlichkeit 0.99, von einem nicht gut vorbereiteten Studenten aber nur mit Wahrscheinlichkeit 0.1 bestanden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student gut vorbereitet ist, sei 0.8. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Student, der die Klausur nicht bestanden hat, gut vorbereitet war?

Lösung:

(a) Wir wissen laut Aufgabentext mit
$A :=$"S. kommt pünktlich zur Vorlesung",
$B :=$"S-Bahn hat Verspätung",
dass
$\mathbf{P}(B) = 0.3$, $\mathbf{P}(A|B) = 0.2$, $\mathbf{P}(A|B^c) = 0.99$
gilt und wir wollen $\mathbf{P}(A)$ berechnen.
Dann gilt mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(B^c)\cdot\mathbf{P}(A|B^c)\\ &= 0.3\cdot 0.2 + 0.7\cdot 0.99\\ &= 0.753.\end{aligned}$$

(b) Definiere die Ereignisse
$A :=$"Student vorbereitet.",
$B :=$"Student besteht Klausur.",
und gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten
$\mathbf{P}(B|A) = 0.99$, $\mathbf{P}(B|A^c) = 0.1$, $\mathbf{P}(A) = 0.8$.
Gesucht ist $\mathbf{P}(A|B^c)$. Mit der Formel von Bayes gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A|B^c) &= \frac{\mathbf{P}(B^c|A)\cdot\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B^c|A)\cdot\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B^c|A^c)\cdot\mathbf{P}(A^c)}\\ &= \frac{0.01\cdot 0.8}{0.01\cdot 0.8 + 0.9\cdot 0.2}\\ &\approx 0.043.\end{aligned}$$

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein W–Raum. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A, A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$$

(sog. Stetigkeit von unten des W–Maßes **P**).
Hinweis: Es gilt

$$A = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}).$$

(b) Für alle $A, A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$$

(sog. Stetigkeit von oben des W-Maßes **P**).
Hinweis: Wenden Sie a) auf $\Omega \setminus A_1$, $\Omega \setminus A_2$, $\ldots$ an.

Lösung:

(a) Mit dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A_N) &= \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{N} (A_n \backslash A_{n-1})\right) \overset{\text{Add.}}{=} \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A_1) + \sum_{n=2}^{N} \mathbf{P}(A_n \backslash A_{n-1}) \\ &= \mathbf{P}(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}(A_n \backslash A_{n-1}) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

(b) Wegen

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\Omega\backslash A_1 \subseteq \Omega\backslash A_1 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Omega\backslash A_n = \Omega\backslash A.$$

Mit der Stetigkeit von unten erhält man dann

$$1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \big(1 - \mathbf{P}(A_n)\big) = \lim_{n\to\infty} P(\Omega\backslash A_n) = \mathbf{P}(\Omega\backslash A) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A).$$

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Sei **P** ein auf der Borelschen σ-Algebra definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Die zu **P** gehörende Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

wird definiert durch

$$F(x) = \mathbf{P}((-\infty, x]) \ (x \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $F(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) F ist monoton nichtfallend, d.h. aus $x_1 \le x_2$ folgt $F(x_1) \le F(x_2)$.

(c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(d) F ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} F(y) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu c) und d): Wenden Sie Aufgabe 22 an. Die Schreibweise $\lim_{x\to a} f(x) = c$ bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$, wobei $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Lösung:

(a) Da $\mathbf{P}(A) \in [0,1]$ für $A \in \mathscr{A}$ nach Definition gilt, so ist auch $F(x) = P((-\infty, x]) \in [0,1]$ $(x \in \mathbb{R})$.

(b) Wegen $(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2]$ für $x_1 \le x_2$ gilt auch $F(x_1) = \mathbf{P}\left((-\infty, x_1]\right) \le \mathbf{P}\left((-\infty, x_2]\right) = F(x_2)$.

(c) Betrachte die monoton steigende reelle Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Dann gilt

$$(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2] \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, \infty).$$

Nach Aufgabe 3.2 a) (Stetigkeit von unten) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P((-\infty, \infty)) = 1.$$

Ist jetzt y_n eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, so ist

$$x_n = \sup_{m\ge m} y_n$$

monoton wachsend, mit $\lim_{n\to\infty} = \infty$ und $x_n \le y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$1 = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \le \lim_{n\to\infty} F(y_n) \overset{a)}{\le} 1.$$

Analog folgt mit der Stetigkeit von oben für eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

Für eine beliebige Folge y_n mit $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ ist

$$x_n = \sup_{m\ge n} y_m$$

monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ und $x_n \le y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$0 = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \ge \lim_{n\to\infty} F(y_n) \overset{a)}{\ge} 0.$$

(d) Sei $(x_n)_n$ nun eine beliebige monoton fallende reelle Folge mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, dann gilt mit Aufgabe 3.2 b) (Stetigkeit von oben) und $A_n = (-\infty, x_n]$ die Behauptung, da

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) \\ &= \mathbf{P}((-\infty, x]) \\ &= F(x).\end{aligned}$$

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß beschrieben wird, dass eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{, für } 0 \le x \le \alpha, \\ 0 & \text{, für } x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

besitzt. Hierbei sind $\alpha, \beta > 0$ Parameter der Dichte.

(a) Welche Beziehung muss zwischen α und β bestehen, damit f wirklich Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$ die zu f gehörende Verteilungsfunktion, d.h. die durch

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

definierte Funktion F.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von f und F für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

(d) Sei wieder $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$. Wie groß ist – sofern f wirklich die zufällige Zeit beschreibt, die Dozent K. zu früh kommt – die Wahrscheinlichkeit, dass Dozent K.
   i. weniger als zwei Minuten zu früh kommt?
   ii. mehr als zehn Minuten zu früh kommt?

Lösung:

(a) Da f eine Dichte ist muss $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \stackrel{!}{=} 1$ gelten.
Somit

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{=0} + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx}_{=0} \\ &= \int_{0}^{\alpha} \beta x dx = \frac{1}{2}\beta\alpha^2 - 0 \quad \stackrel{!}{=} 1\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\beta}}$$

($\alpha = -\sqrt{\frac{2}{\beta}}$ wäre zwar ebenfalls eine Lösung der Gleichung, allerdings ist α als positiv vorausgesetzt.)

(b) Für $t < 0$ ist $f(t) = 0$ und somit gilt für $x \leq 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Für $0 \leq x \leq 4$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \beta t dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{8} t dt = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} t^2\right]_{t=0}^{x} = \frac{1}{16}x^2.$$

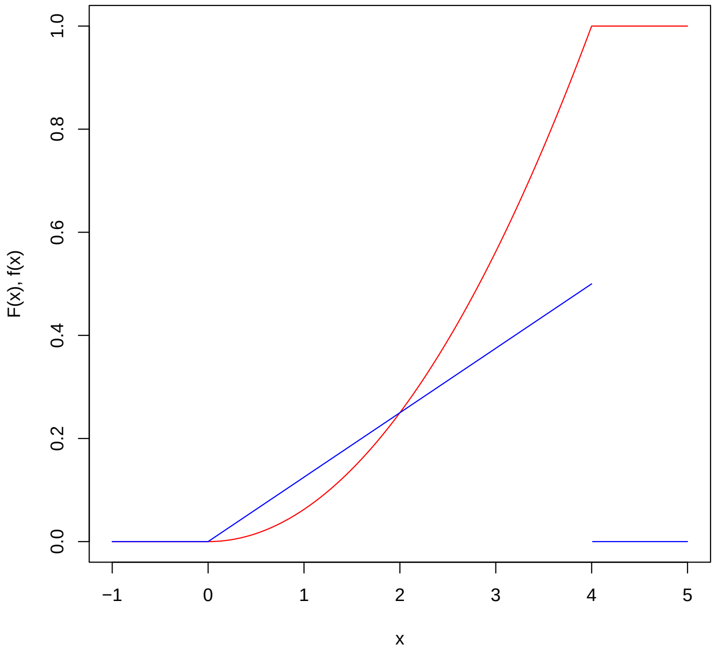
Bleibt noch der Fall $x > 4$. Hier gilt

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{x} f(t)dt = 0 + \frac{1}{16}4^2 + 0 = 1.$$

Somit gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

(c) Der Graph von f (blau) und F (rot):



(d) Sei $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

i.

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= \int_{-\infty}^{2} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{2} \frac{1}{8} x dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{10} f(x)dx \\ &= 1 - \int_{0}^{4} \frac{1}{8} x dx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^4 = 1 - 1 = 0.00 \end{aligned}$$