Einführung in die Stochastik
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
19. Mai 2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 17 (4 Punkte)

In einer Fernsehshow wird folgendes Glücksspiel angeboten: Versteckt hinter drei Türen befinden sich ein Auto und zwei Ziegen. Im ersten Schritt deutet der Spieler (in zufälliger Weise) auf eine der drei Türen, die aber geschlossen bleibt. Dann öffnet der Spielleiter eine der beiden anderen Türen, hinter der sich eine Ziege befindet. Im zweiten Schritt wählt der Spieler eine der beiden noch geschlossenen Türen. Befindet sich dahinter das Auto, so hat er dieses gewonnen.

Im Folgenden wollen wir wissen, ob der Spieler seine Gewinnchance erhöht, wenn er seine im ersten Schritt getroffene Wahl verändert. Definieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler das Auto gewinnt, sofern er

(a) seine im ersten Schritt getroffene Wahl beibehält,

(b) seine im ersten Schritt getroffene Wahl aufgibt und die andere geschlossene Tür wählt.

Lösung: Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ mit

$$\Omega = \big\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,3\}\big\}, \quad \mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$$

und

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{9} \quad \text{für } A \subseteq \Omega.$$

Hierbei ist ω_1 die Nummer der Tür, hinter der sich das Auto befindet und ω_2 die Tür, auf die der Spieler tippt. Seien nun A bzw. B die Ereignisse, dass der Spieler das Auto bei Strategie (a) bzw. Strategie (b) gewinnt.

Es gilt

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \text{ und } B = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

und somit

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3} \text{ und } \mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}.$$

Damit verdoppelt sich die Gewinnchance des Spielers, wenn er seine im ersten Schritt getroffene Wahl nicht beibehält.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Zwei Spieler vereinbaren ein faires Spiel über 7 Runden. Jeder zahlt 5€ als Einsatz und der Gewinner erhält die gesamten 10€. Nachdem 2 Runden von Spieler A und 3 Runden von Spieler B gewonnen wurden muss das Spiel abgebrochen werden. Spieler A schlägt vor, den Gewinn im Verhältnis 2 : 3 zu teilen. Soll sich Spieler B darauf einlassen? Bestimmen Sie unter expliziter Angabe des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraums die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B das gesamte Spiel gewinnt.

Lösung: Es genügt die noch verbleibenden Spiele zu betrachten (alternativ kann man sich natürlich auch alle Spiele anschauen, aber das ist deutlich mehr Aufwand). Für die letzten beiden Spiele gibt es vier mögliche Ausgänge (hier notiert aus Sicht von Spieler B, d.h. G bedeutet Spieler B gewinnt die Runde, V bedeutet Spieler B verliert die Runde), nämlich

$$(G,G),(G,V),(V,G),(V,V).$$

Da es sich um ein faires Spiel handelt, kommt jede dieser Möglichkeiten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ vor. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit vom Ereignis

$$E = \{(G,G),(G,V),(V,G)\}.$$

Betrachtet wird also der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, mit $\Omega = \{G,V\}^2$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ und $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{4}$, für $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Insgesamt erhält man als Wahrscheinlichkeit das Spieler B das gesamte Spiel gewinnt

$$\mathbf{P}(E) = \frac{3}{4}.$$

Wegen $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ sollte sich Spieler B nicht auf eine Gewinnaufteilung im Verhältnis 2 : 3 einlassen.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie: Sind $A_i \in \mathscr{A}$ für $i \in I = \{1,\dots,n\}$, so gilt

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $|I| = 1$ und $|I| = 2$ und zeigen Sie den allgemeinen Fall mit vollständiger Induktion.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a), um eine Formel für $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i^C\right)$ herzuleiten und zu beweisen, wobei wiederum $A_i \in \mathscr{A}$ für $i \in I = \{1,\dots,n\}$.

Lösung:

(a) Beweis per Induktion über $n = |I|$. Für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) = (-1)^0 \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1),$$

da $J = I$ die einzige nicht leere Teilmenge von I ist. Gelte die Behauptung für Indexmengen der Länge n (Induktionsannahme). Für den Induktionsschritt ist dann zu zeigen, dass die Formel für die Indexmenge $K = I \cup \{n+1\}$ mit $I = \{1,\dots,n\}$ gilt. Für K gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in K} A_k\right) &= \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{i\in I} A_i\right) \\
&\overset{(1)}{=} \mathbf{P}(A_{n+1}) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right) \\
&\overset{(2)}{=} \mathbf{P}(A_{n+1}) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\overset{\text{Ind. Ann.}}{=} \mathbf{P}(A_{n+1}) + \sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) - \sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} \left(A_j \cap A_{n+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Bei (1) wurde die aus der Vorlesung bekannte Tatsache $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$, bei (2) das Distributivgesetz für Mengen verwendet.

Weiter gilt jetzt

$$\sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \sum_{\substack{J \subseteq K \\ J \neq \emptyset \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

und

$$
\begin{aligned}
-\sum_{\substack{J\subseteq I\\ J\neq\emptyset}}(-1)^{|J|-1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J}\left(A_j\cap A_{n+1}\right)\right) &= \sum_{\substack{J\subseteq I\\ J\neq\emptyset}}(-1)^{|J|}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J\cup\{n+1\}}A_j\right)\\
&= \sum_{\substack{J\subseteq K\\ J\neq\emptyset, J\neq\{n+1\}\\ n+1\in J}}(-1)^{|J|-1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J\cup\{n+1\}}A_j\right).
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\{J\subseteq K : J\neq\emptyset\} = \{\{n+1\}\}\cup\{J\subseteq K : J\neq\emptyset, n+1\notin J\}\cup\{J\subseteq K : J\neq\emptyset, J\neq\{n+1\}, n+1\in J\}
$$

und da die drei Mengen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens paarweise disjunkt sind, erhalten wir die behauptete Formel für $K=\{1,\ldots,n+1\}$.

(b) Mit Übergang zum Gegenereignis erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i^C\right) &= 1-\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I}A_i^C\right)^C\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\\
&\overset{\text{(a)}}{=} 1-\sum_{\substack{J\subseteq I\\ J\neq\emptyset}}(-1)^{|J|-1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right) = 1+\sum_{\substack{J\subseteq I\\ J\neq\emptyset}}(-1)^{|J|}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)
\end{aligned}
$$

Interpretiert man den Schnitt über die leere Indexmenge als ganz Ω, so schreibt sich die Formel als

$$
\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i^C\right) = \sum_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right).
$$

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Von zwei fabrikneuen identische Sätzen Spielkarten zu je 52 Karten wird einer gründlich gemischt. Beide werden verdeckt nebeneinander gelegt. Anschließend wird immer die jeweils oberste Karte des einen Stapels zusammen mit derjenigen des anderen Stapels aufgedeckt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabe 19 (b), die Wahrscheinlichkeit, dass nie die gleiche Karte bei beiden Stapeln aufgedeckt wird, bis die Stapel aufgebraucht sind. Approximieren Sie dabei die auftretende Summe durch die entsprechende unendliche Reihe und beachten Sie: Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$
\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.
$$

Hinweis: Denken Sie sich die Karten von 1 bis 52 durchnummeriert und verwenden Sie die Formel aus Aufgabe 19 (b) mit A_i definiert als „im i-ten Schritt wird von dem durchmischten Stapel Karte Nummer i aufgedeckt“.

Lösung: Wir verwenden die Notation von Aufgabe 19 und setzen $I=\{1,\ldots,52\}$. Weiter sei für $i\in I$ das Ereignis A_i definiert als „die i-te Karte ist gleich“. Dann entspricht $\bigcap_{i\in I}A_i^C$ dem Ereignis „alle aufgedeckten Karten sind verschieden“. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i^C\right)$.

Mit der Formel in Aufgabe 19 (b) folgt nun

$$
\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i^C\right) = \sum_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right) = \sum_{n=0}^{52}\sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=n}}(-1)^{n}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right).
$$

Der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum ist $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, Ω ist dabei die Menge aller Permutationen der Zahlen $1,\ldots,52$, $\mathscr{A}$ die zugehörige Potenzmenge und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.

Für $n \in I$ und $J \subseteq I$ mit $|J| = n$ beschreibt $\bigcap_{j \in J} A_j$ das Ereignis, dass für die Karten aus J die gleiche Karte aufgedeckt wurde. An diesen n Positionen ist die Permutation festgelegt, alle anderen $52 - n$ Positionen können beliebig vertauscht werden. Dies ergibt $(52 - n)!$ Möglichkeiten. Also gilt

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(52-n)!}{52!}.$$

Im nächsten Schritt überlegen wir uns, wie oft diese Wahrscheinlichkeit in der Summe auftritt, d.h. wieviele n-elementigen Teilmengen es in I gibt. Dies sind genau $\binom{52}{n} = \frac{52!}{n! \cdot (52-n)!}$.

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{52} \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = n}} (-1)^n \mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
= \; &\sum_{n=0}^{52} (-1)^n \binom{52}{n} \cdot \frac{(52-n)!}{52!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{52} \frac{(-1)^n}{n!} \\
\approx \; &\exp(-1) \quad \approx \quad 0.3678794.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in keiner Runde zwei gleiche Karten aufgedeckt werden, ist also etwa 0.3678794.