Einführung in die Stochastik
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
1. Juni 2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Die Zuverlässigkeit einer Tuberkulose (Tbc)-Röntgenuntersuchung sei durch folgende Angaben gekennzeichnet:

- 90 % der Tbc-kranken Personen werden durch Röntgen entdeckt
- 99 % der Tbc-freien Personen werden als solche erkannt.

Aus einer großen Bevölkerung, von der 0.1% Tbc-krank sind, wird nun eine zufällig herausgegriffene Person geröntgt un als Tbc-verdächtig eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person wirklich Tbc-krank ist?

Aufgabe 26 (4 Punkte)

(a) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ mit

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Zeigen Sie:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2 | A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n | A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Hinweis: Formen Sie die rechte Seite mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit um.

(b) Student S. hat das Passwort für seinen Rechnerzugang vergessen. Er erinnert sich gerade noch, dass es aus genau 8 Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ besteht. Er versucht nun, durch zufällige Eingabe 8–stelliger Zahlen das Passwort zu erraten. Da er sich alle bereits eingegebenen Zahlen notiert, tippt er keine Zahl doppelt ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der n–ten Eingabe einer 8–stelligen Zahl das Passwort findet ($n \in \mathbb{N}$ fest).
Hinweis: Gefragt ist nach

$$\mathbf{P}(B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c \cap B_n),$$

wobei B_i das Ereignis ist, dass der Student bei der i–ten Eingabe das richtige Passwort eintippt.

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass dann die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A, B sind unabhängig, d.h. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

(b) $1_A, 1_B$ sind unabhängig, d.h. für alle $C_1, C_2 \in \mathscr{B}$ gilt

$$\mathbf{P}\left[1_A \in C_1, 1_B \in C_2\right] = \mathbf{P}\left[1_A \in C_1\right] \cdot \mathbf{P}\left[1_B \in C_2\right].$$

Hinweis: Für $C_1 \in \mathscr{B}$ gilt immer

$$1_A^{-1}(C_1) \in \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Machen Sie sich damit klar, dass es genügt zu zeigen: Mit A, B sind auch A^c, B unabhängig. Verwenden Sie dazu

$$A^c \cap B = B \setminus (A \cap B).$$

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Eine Versicherung investiert einen Teil ihrer Rücklagen in einen Immobilienfond. Aus Erfahrung weiß die Versicherung, dass der für 1 Euro erzielte zukünftige Erlös beschrieben wird durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{9}{10} \cdot x^{-2} & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die zur Dichte f gehörende Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

(b) Berechnen Sie (Skizze von F verwenden!) den Value at Risk, d.h. denjenigen Wert $VaR \in \mathbb{R}$, für den gilt

$$F(VaR) = 0.05.$$

(c) Interpretieren Sie den VaR anschaulich.
Hinweis: Ist X stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte f, was gilt dann für die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}[X \leq VaR] \text{ bzw. } \mathbf{P}[X > VaR]?$$