

Einführung in die Stochastik

6. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
23. Mai 2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 21

(4 Punkte)

- (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine S-Bahn Verspätung hat, betrage 0.30. Sofern die S-Bahn Verspätung hat, kommt Student S. nur mit Wahrscheinlichkeit 0.2 pünktlich zur Vorlesung. Sofern die S-Bahn aber keine Verspätung hat, kommt er mit Wahrscheinlichkeit 0.99 pünktlich zur Vorlesung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. pünktlich zur Vorlesung kommt?
- (b) Eine Klausur wird von einem gut vorbereiteten Studenten mit Wahrscheinlichkeit 0.99, von einem nicht gut vorbereiteten Studenten aber nur mit Wahrscheinlichkeit 0.1 bestanden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student gut vorbereitet ist, sei 0.8. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Student, der die Klausur nicht bestanden hat, gut vorbereitet war?

Aufgabe 22

(4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein W-Raum. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $A, A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$$

(sog. Stetigkeit von unten des W-Maßes \mathbf{P}).

Hinweis: Es gilt

$$A = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}).$$

- (b) Für alle $A, A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$$

(sog. Stetigkeit von oben des W-Maßes \mathbf{P}).

Hinweis: Wenden Sie a) auf $\Omega \setminus A_1, \Omega \setminus A_2, \dots$ an.

Aufgabe 23

(4 Punkte)

Sei \mathbf{P} ein auf der Borelschen σ -Algebra definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Die zu \mathbf{P} gehörende Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

wird definiert durch

$$F(x) = \mathbf{P}((-\infty, x]) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) $F(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) F ist monoton nichtfallend, d.h. aus $x_1 \leq x_2$ folgt $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- (d) F ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} F(y) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu c) und d): Wenden Sie Aufgabe 22 an. Die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$, wobei $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Aufgabe 24

(4 Punkte)

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß beschrieben wird, das eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & , \text{ für } 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & , \text{ für } x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

besitzt. Hierbei sind $\alpha, \beta > 0$ Parameter der Dichte.

- (a) Welche Beziehung muss zwischen α und β bestehen, damit f wirklich Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist?
- (b) Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$ die zu f gehörende Verteilungsfunktion, d.h. die durch

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

definierte Funktion F .

- (c) Skizzieren Sie die Graphen von f und F für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.
- (d) Sei wieder $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$. Wie groß ist – sofern f wirklich die zufällige Zeit beschreibt, die Dozent K. zu früh kommt – die Wahrscheinlichkeit, dass Dozent K.
 - i. weniger als zwei Minuten zu früh kommt?
 - ii. mehr als zehn Minuten zu früh kommt?