Einführung in die Stochastik
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
18. Mai 2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 17 (4 Punkte)
In einer Fernsehshow wird folgendes Glücksspiel angeboten: Versteckt hinter drei Türen befinden sich ein Auto und zwei Ziegen. Im ersten Schritt deutet der Spieler (in zufälliger Weise) auf eine der drei Türen, die aber geschlossen bleibt. Dann öffnet der Spielleiter eine der beiden anderen Türen, hinter der sich eine Ziege befindet. Im zweiten Schritt wählt der Spieler eine der beiden noch geschlossenen Türen. Befindet sich dahinter das Auto, so hat er dieses gewonnen.

Im Folgenden wollen wir wissen, ob der Spieler seine Gewinnchance erhöht, wenn er seine im ersten Schritt getroffene Wahl verändert. Definieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler das Auto gewinnt, sofern er

(a) seine im ersten Schritt getroffene Wahl beibehält,

(b) seine im ersten Schritt getroffene Wahl aufgibt und die andere geschlossene Tür wählt.

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Zwei Spieler vereinbaren ein faires Spiel über 7 Runden. Jeder zahlt 5€ als Einsatz und der Gewinner erhält die gesamten 10€. Nachdem 2 Runden von Spieler A und 3 Runden von Spieler B gewonnen wurden muss das Spiel abgebrochen werden. Spieler A schlägt vor, den Gewinn im Verhältnis 2 : 3 zu teilen. Soll sich Spieler B darauf einlassen? Bestimmen Sie unter expliziter Angabe des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraums die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B das gesamte Spiel gewinnt.

Aufgabe 19 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie: Sind $A_i \in \mathscr{A}$ für $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, so gilt

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $|I| = 1$ und $|I| = 2$ und zeigen Sie den allgemeinen Fall mit vollständiger Induktion.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a), um eine Formel für $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i^C\right)$ herzuleiten und zu beweisen, wobei wiederum $A_i \in \mathscr{A}$ für $i \in I = \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Von zwei fabrikneuen identische Sätzen Spielkarten zu je 52 Karten wird einer gründlich gemischt. Beide werden verdeckt nebeneinander gelegt. Anschließend wird immer die jeweils oberste Karte des einen Stapels zusammen mit derjenigen des anderen Stapels aufgedeckt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabe 19 (b), die Wahrscheinlichkeit, dass nie die gleiche Karte bei beiden Stapeln aufgedeckt wird, bis die Stapel aufgebraucht sind. Approximieren Sie dabei die auftretende Summe durch die entsprechende unendliche Reihe und beachten Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Hinwieis: Denken Sie sich die Karten von 1 bis 52 durchnummeriert und verwenden Sie die Formel aus Aufgabe 19 (b) mit A_i definiert als „im i-ten Schritt wird von dem durchmischten Stapel Karte Nummer i aufgedeckt“.