Einführung in die Stochastik
4. Übungsblatt

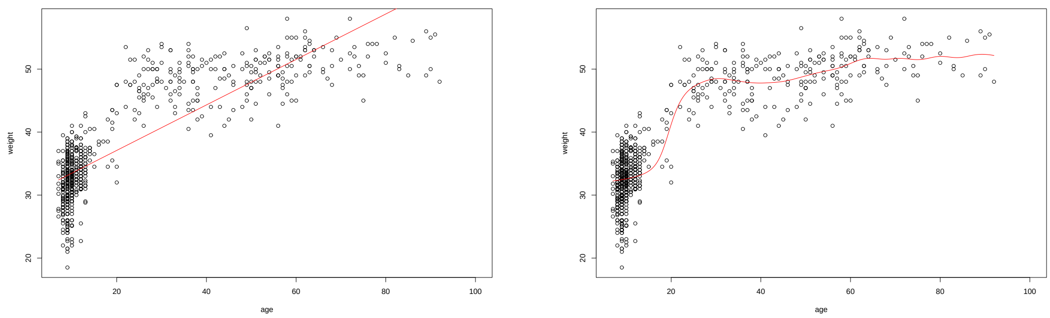
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
13.05.2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Vor einigen Jahren haben amerikanische Biologen die amerikanische Walddrossel (eine Vogelart) beobachtet, um dabei unter anderem den Zusammenhang zwischen dem Alter und dem Gewicht der Vögel zu untersuchen. Die Durchführung der linearen und nichtparametrischen Regressionsschätzung hat folgende Bilder (siehe Abbildung 1) ergeben. Vergleichen Sie diese zwei Arten der Regressionsschätzung anhand der Bilder. Interpretieren Sie den Zusammenhang von Alter und Gewicht der amerikanischen Walddrossel, der aus der linearen bzw. nichtparametrischen Regression hervorgeht. Was können Sie über die Korrelation der Variablen Alter und Gewicht aussagen?



(a) lineare (b) nichtparametrische

Abbildung 1: Regressionsschätzungen

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Die Innenstadt von Mannheim ist in Häuserblöcken statt in Straßenzügen angelegt (siehe Abbildung 2). Deswegen hat sie auch den Beinamen Quadratestadt. In der Horizontalen sind die Nummern und in der Vertikalen die Buchstaben abgetragen, sodass jeder Häuserblock eindeutig durch z.B. A1 oder K3 identifiziert werden kann. Eine Touristengruppe, die sich im Block C6 aufhält, möchte von hier aus (Start) bis zum Block T6 (Ziel) den kürzesten Weg nehmen. (Einfachheitshalber wird angenommen, dass alle Blöcke gleich groß sind.) Wieviele verschiedene kürzeste Wege hat die Gruppe zur Auswahl.

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Ein Zufallsgenerator erzeugt mit Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ Ziffernblöcke der Länge 4. Geben Sie mit Begründung die Wahrscheinlichkeiten für folgende fünf Ereignisse an:
(a) alle Ziffern verschieden
(b) genau ein Paar gleicher Ziffern
(c) genau zwei Paare gleicher Ziffern
(d) genau drei gleiche Ziffern
(e) vier gleiche Ziffern
Berechnen Sie zur Kontrolle die Summe aller Wahrscheinlichkeiten.

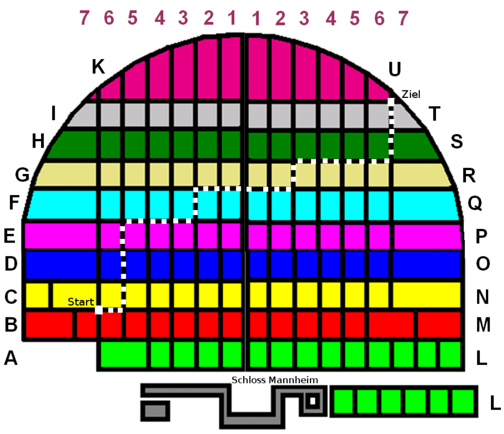


Abbildung 2: Innenstadt von Mannheim

Aufgabe 12 (4 Punkte)

a) (Erstes Lemma von Borel und Cantelli)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(A_n)_n$ eine Folge von Ereignissen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

Hinweis: Begründen Sie zunächst

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq P(\cup_{k=N}^{\infty} A_k) \ (N \in \mathbb{N}).$$

Verwenden Sie diese Beziehung und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit rechts mit Hilfe der σ-Subadditivität ab.

b) Dozent K. fragt in jeder seiner mündlichen Prüfungen nach dem ersten Lemma von Borel und Cantelli. Da die Studenten sich untereinander absprechen, kann der n-te Prüfling die Frage nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^2}$ nicht richtig beantworten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei sukzessiver Durchführung von unendlich vielen Prüfungen nur endlich viele der Prüflinge diese Frage nicht richtig beantworten?
Hinweis: Wenden Sie a) mit A_n="Prüfling n beantwortet die Frage nicht richtig" an.

Dieses Übungsblatt wird im Rahmen der Übungen am 16. bzw. 17.05.2011 besprochen. Ihre Ausarbeitungen geben Sie am 23. bzw. 24.05.2011 in Ihrere Übungsgruppe ab. Sie erhalten diese am 30. bzw. 31.05.2011 korrigiert zurück.