

Einführung in die Stochastik

11. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
D. Furer

SS 2011
08.07.2011

Gruppen und Hausübung

Aufgabe 41

Die zufällige Lebensdauer einer Leuchtstoffröhre hängt nicht von der gesamten Brenndauer, sondern nur von der Anzahl der Ein- und Ausschaltvorgänge ab. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Röhre beim k -ten Einschaltvorgang ausfällt, sei $p^{k-1} \cdot (1-p)$ ($k \in \mathbb{N}$), wobei der Parameter $p \in (0, 1)$ als Maß für die Güte der Röhre angesehen werden kann.

In einer Glühlampenfabrik wird die Qualität der produzierten Röhren dadurch kontrolliert, dass n Röhren unabhängig voneinander durch Relais ständig ein- und ausgeschaltet werden. Dabei wird registriert, wann die einzelnen Röhren ausfallen. Das Ergebnis dieser Versuche sei $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, d.h. die i -te Röhre ist beim k_i -ten Einschaltvorgang ausgefallen.

Bestimmen Sie durch Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips eine Schätzung des Parameters p ausgehend von k_1, \dots, k_n .

Aufgabe 42

Ein Flugunternehmen möchte die zufällige Anzahl X der Personen, die nach Erwerb eines Flugtickets nicht (rechtzeitig) zum Abflug erscheinen, stochastisch modellieren. Nimmt man an, dass bei $n = 555$ verkauften Flugtickets jede einzelne Person, die ein Flugticket erworben hat, unbeeinflusst von den anderen Käufern der Flugtickets mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ nicht zum Abflug erscheint, so ist die zufällige Zahl X der nicht zum Abflug erscheinenden Personen binomialverteilt mit Parametern $n = 555$ und p , d.h.

$$\mathbf{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n\}).$$

Bei den letzten zehn Abflügen sind

$$x_1 = 20, x_2 = 11, x_3 = 28, x_4 = 3, x_5 = 3, x_6 = 7, x_7 = 13, x_8 = 17, x_9 = 22, x_{10} = 5$$

der jeweils $n = 555$ Personen, die ein Flugticket gekauft hatten, nicht zum Abflug erschienen.

Konstruieren Sie mit Hilfe des Maximum-Likelihood-Prinzips ausgehend von diesen Daten eine Schätzung von p .

Aufgabe 43

Wirtschaftswissenschaftler W. möchte die Dauer von Arbeitslosigkeit stochastisch modellieren. Dazu beschreibt er sie durch eine $\exp(\lambda)$ -Verteilung, d.h. durch eine Verteilung, die eine Dichte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ besitzt mit

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Um den unbekannt Parameter $\lambda > 0$ zu schätzen, lässt er sich vom Arbeitsamt für vier zufällig herausgegriffene Arbeitslose ermittelten, dass diese genau $x_1 = 12$ bzw. $x_2 = 2$ bzw. $x_3 = 18$ bzw. $x_4 = 8$ Monate nach Verlust ihres bisherigen Arbeitsplatzes eine neue Arbeitsstelle gefunden haben.

(a) Konstruieren Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ und geben Sie an, was man im Falle der obigen Stichprobe als Schätzung für λ erhält.

(b) Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$$

ein konsistenter Schätzer für λ ist.

Aufgabe 44

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } 0 \leq x \leq 10, \\ \frac{1}{10} - \alpha & \text{für } 10 < x \leq 20, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 20 \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Um den Parameter $\alpha \in [0, \frac{1}{10}]$ der Dichte von X zu schätzen, notiert sich Student S., dass Dozent K. bei den letzten $n = 5$ Vorlesungen

$$x_1 = 10 \text{ bzw. } x_2 = 3 \text{ bzw. } x_3 = 4 \text{ bzw. } x_4 = 1 \text{ bzw. } x_5 = 15$$

Minuten zu früh kam.

- a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^5 f_{\alpha}(x_i), \quad (\alpha \in [0, \frac{1}{10}]).$$

- b) Bestimmen Sie – ausgehend von den angegebenen Werten von x_1, \dots, x_5 – die zugehörige Maximum-Likelihood-Schätzung von α .
- c) Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f_{α} . Zeigen Sie: Der Schätzer

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{10 \cdot n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,10]}(X_i)$$

mit

$$1_{[0,10]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 10, \end{cases}$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer für α .

- d) Ist der Schätzer in c) auch konsistent? Begründen Sie ihre Antwort.

Dieses Übungsblatt wird im Rahmen der Übungen am 11. bzw. 12.07.2011 besprochen.