Seminar: Reelle Komplexität

Pfadzerlegung und unberechenbare reelle Funktionen

Johanna Sokoli

27.06.2011

Inhalt

- Definitionen

Inhalt

- Definitionen
- Pfadzerlegung

Inhalt

- Definitionen
- Pfadzerlegung
- Unberechenbarkeit

Inhalt

- Definitionen
- Pfadzerlegung
- Unberechenbarkeit
- Berechenbarkeit

Definitionen

- **Definition:**
  Sei R Integritätsbereich und $S \subset R^n$. S heißt **elementar semi-algebraisch** über R, falls R angeordnet ist und alle $x \in S$ eine endliche Menge von polynomiellen Gleichungen und Ungleichungen über R erfüllen.

Definitionen

- **Definition:**
  Sei R Integritätsbereich und $S \subset R^n$. S heißt **elementar semi-algebraisch** über R, falls R angeordnet ist und alle $x \in S$ eine endliche Menge von polynomiellen Gleichungen und Ungleichungen über R erfüllen.
- Eine **semi-algebraische Menge** ist endliche Vereinigung von elementar semi-algebraischen Mengen.

Definitionen

- **Definition:**
  Sei R Integritätsbereich und $S \subset R^n$. S heißt **elementar semi-algebraisch** über R, falls R angeordnet ist und alle $x \in S$ eine endliche Menge von polynomiellen Gleichungen und Ungleichungen über R erfüllen.
- Eine **semi-algebraische Menge** ist endliche Vereinigung von elementar semi-algebraischen Mengen.
- Eine **abzählbar semi-algebraische Menge** ist eine abzählbare Vereinigung von elementar semi-algebraischen Mengen.

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$S_1 \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\}$$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\ S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \end{aligned}$$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\}
\end{aligned}
$$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\}
\end{aligned}$$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = -1,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\}
\end{aligned}
$$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = -1,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_6 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\}
\end{aligned}
$$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = -1,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_6 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_7 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x + 2,\ -1 \leq x,\ x \leq 0\}
\end{aligned}
$$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Die Menge N, das "Haus vom Nikolaus", ist eine semi-algebraische Menge:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1,\ -1 \leq y,\ y \leq 1\} \\
S_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = -1,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_6 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1,\ -1 \leq x,\ x \leq 1\} \\
S_7 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x + 2,\ -1 \leq x,\ x \leq 0\} \\
S_8 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x + 2,\ 0 \leq x,\ x \leq 1\}
\end{aligned}
$$

  und $\quad N = \bigcup_{i=1}^{8} S_i.$

Definitionen

- **Beispiel:**
  Auch ein Smiley ist eine semi-algebraische Menge.

Definitionen

- **Beispiel:**
  Auch ein Smiley ist eine semi-algebraische Menge.
- **Bemerkung:**
  Im 1-dim. Fall sind alle semi-algebraische Mengen eine Vereinigung von Punkten und Intervallen.

Definitionen

- **Definition:**

$$\Phi_M(x) = O(x^T)$$

Definitionen

- **Definition:**

$$\Phi_M(x) = O(x^T)$$

wobei T die Zeit ist, nach der die Maschine hält,

Definitionen

- **Definition:**

$$\Phi_M(x) = O(x^T)$$

wobei T die Zeit ist, nach der die Maschine hält,
O die letzte Woche definierte Ausgabeabbildung

Definitionen

- **Definition:**

$$\Phi_M(x) = O(x^T)$$

wobei T die Zeit ist, nach der die Maschine hält,
O die letzte Woche definierte Ausgabeabbildung
und x^T die Berechung der BCSS-Maschine nach T Schritten.

Definitionen

- **Definition:**
$$\Phi_M(x) = O(x^T)$$
wobei T die Zeit ist, nach der die Maschine hält,
O die letzte Woche definierte Ausgabeabbildung
und x^T die Berechung der BCSS-Maschine nach T Schritten.
- **Definition:**
$T_M(x)$ ist die Zeit, die M bei Eingabe x benötigt, um zu halten.

Definitionen

- **Definition:**

$$\Phi_M(x) = O(x^T)$$

wobei T die Zeit ist, nach der die Maschine hält,
O die letzte Woche definierte Ausgabeabbildung
und x^T die Berechung der BCSS-Maschine nach T Schritten.

- **Definition:**
$T_M(x)$ ist die Zeit, die M bei Eingabe x benötigt, um zu halten.

$$\Omega_M = \{x \in \mathcal{I}_M | T_M(x) < \infty\}$$

wird als **Haltemenge von** M bezeichnet.

Definitionen

- **Definition:**
$$\Phi_M(x) = O(x^T)$$
wobei T die Zeit ist, nach der die Maschine hält,
O die letzte Woche definierte Ausgabeabbildung
und x^T die Berechung der BCSS-Maschine nach T Schritten.
- **Definition:**
$T_M(x)$ ist die Zeit, die M bei Eingabe x benötigt, um zu halten.
$$\Omega_M = \{x \in \mathcal{I}_M | T_M(x) < \infty\}$$
wird als **Haltemenge von** M bezeichnet.
- **Definition:**
Eine Menge $S \subset R^n$ heißt **entscheidbar über** R, wenn die charakteristische Funktion dieser Menge berechenbar ist.

Definitionen

- **Definition:**
  Der Berechnungspfad der Maschine M bei Eingabe x, d.h. die Menge der Knoten
  $$\eta^0, \ldots, \eta^k, \ldots$$
  wird mit γ_x bezeichnet.

Definitionen

- **Definition:**
  Der Berechnungspfad der Maschine M bei Eingabe x, d.h. die Menge der Knoten
  $$\eta^0, \ldots, \eta^k, \ldots$$
  wird mit γ_x bezeichnet.
- Sei weiterhin
  $$\nu_{\gamma(k)} = \{x' \in \mathcal{I}_M | \gamma_{x'}(k) = \gamma(k)\}$$

Definitionen

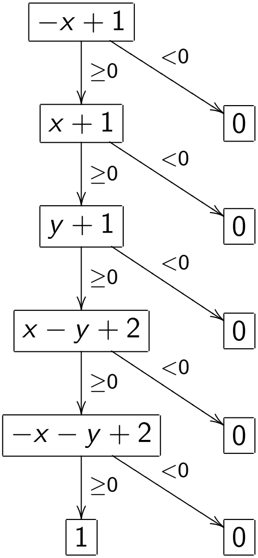
- **Definition:**
  Der Berechnungspfad der Maschine M bei Eingabe x, d.h. die Menge der Knoten
  $$\eta^0, \dots, \eta^k, \dots$$
  wird mit γ_x bezeichnet.
- Sei weiterhin
  $$\nu_{\gamma(k)} = \{x' \in \mathcal{I}_M | \gamma_{x'}(k) = \gamma(k)\}$$
  sowie
  $$\Gamma_T = \{\gamma_x(T) | T_M(x) \leq T,\ x \in \mathcal{I}_M\}$$

Definitionen

- **Definition:**
  Der Berechnungspfad der Maschine M bei Eingabe x, d.h. die Menge der Knoten
  $$\eta^0, \ldots, \eta^k, \ldots$$
  wird mit γ_x bezeichnet.
- Sei weiterhin
  $$\nu_{\gamma(k)} = \{x' \in \mathcal{I}_M | \gamma_{x'}(k) = \gamma(k)\}$$
  sowie
  $$\Gamma_T = \{\gamma_x(T) | T_M(x) \leq T,\ x \in \mathcal{I}_M\}$$
  und
  $$\Gamma'_M = \{\gamma \in \Gamma_T \text{ für ein } T < \infty, \gamma \notin \Gamma_{T'}\ \forall T' < T\}$$

Definitionen

Dies ist die Pfadzerlegung des Algorithmus, der die Punkte innerhalb des Hauses vom Nikolaus entscheidet.



Pfadzerlegung

Lemma:

1. Sei R Integritätsbereich. Dann ist $\nu_{\gamma(k)}$ elementar semi-algebraisch.

Pfadzerlegung

Lemma:

1. Sei R Integritätsbereich. Dann ist $\nu_{\gamma(k)}$ elementar semi-algebraisch.
2. Für $\gamma_1(k) \neq \gamma_2(k)$ folgt $\nu_{\gamma_1(k)} \cap \nu_{\gamma_2(k)} = \emptyset$.

Pfadzerlegung

Lemma:

1. Sei R Integritätsbereich. Dann ist $\nu_{\gamma(k)}$ elementar semi-algebraisch.
2. Für $\gamma_1(k) \neq \gamma_2(k)$ folgt $\nu_{\gamma_1(k)} \cap \nu_{\gamma_2(k)} = \emptyset$.

Beweis:

2) folgt aus der Definition.

Pfadzerlegung

Lemma:

1. Sei R Integritätsbereich. Dann ist $\nu_{\gamma(k)}$ elementar semi-algebraisch.
2. Für $\gamma_1(k) \neq \gamma_2(k)$ folgt $\nu_{\gamma_1(k)} \cap \nu_{\gamma_2(k)} = \emptyset$.

Beweis:

2) folgt aus der Definition.

1) Fall 1: Die Verzweigungsfunktionen sind Polynome. Dann ist die Behauptung klar.

Pfadzerlegung

Fall 2: Die Verzweigungsfunktionen sind rationale Abbildungen.
Sei die Verzweigungsfunktion $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p, q.

Pfadzerlegung

Fall 2: Die Verzweigungsfunktionen sind rationale Abbildungen.
Sei die Verzweigungsfunktion $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p, q.
Sei OBdA $q(x) \neq 0$ (siehe nächste Folie).

Pfadzerlegung

Fall 2: Die Verzweigungsfunktionen sind rationale Abbildungen.
Sei die Verzweigungsfunktion $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p, q.
Sei OBdA $q(x) \neq 0$ (siehe nächste Folie).
Dann gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow p(x) = 0$$

bzw. im Fall, dass R eine Ordnung besitzt

$$\frac{p(x)}{q(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x)q(x) < 0$$

Pfadzerlegung

Fall 2: Die Verzweigungsfunktionen sind rationale Abbildungen.
Sei die Verzweigungsfunktion $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p, q.
Sei OBdA $q(x) \neq 0$ (siehe nächste Folie).
Dann gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow p(x) = 0$$

bzw. im Fall, dass R eine Ordnung besitzt

$$\frac{p(x)}{q(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x)q(x) < 0$$

sodass man die Verzweigungsfunktionen in Polynome umformen kann, ohne die Berechnung zu ändern.
Damit folgt die Behauptung.

Pfadzerlegung

$q(x) \neq 0$ kann OBdA angenommen werden:

Pfadzerlegung

$q(x) \neq 0$ kann OBdA angenommen werden:

- Füge vor jeden Berechnungsschritt eine Verzweigungsfunktion ein, die testet, ob der Nenner der im nächsten Schritt zu berechnenden Funktion verschwindet.

Pfadzerlegung

$q(x) \neq 0$ kann OBdA angenommen werden:

- Füge vor jeden Berechnungsschritt eine Verzweigungsfunktion ein, die testet, ob der Nenner der im nächsten Schritt zu berechnenden Funktion verschwindet.
- Falls nein, gehe zum nächsten Knoten über.

Pfadzerlegung

$q(x) \neq 0$ kann OBdA angenommen werden:

- Füge vor jeden Berechnungsschritt eine Verzweigungsfunktion ein, die testet, ob der Nenner der im nächsten Schritt zu berechnenden Funktion verschwindet.
- Falls nein, gehe zum nächsten Knoten über.
- Falls ja, gehe in eine Endlosschleife: teste erneut, ob der Nenner verschwindet.

Pfadzerlegung

Satz:
Für alle Maschinen M über einem Integritätsbereich R gilt:

Pfadzerlegung

Satz:

Für alle Maschinen M über einem Integritätsbereich R gilt:

1. Sei $T > 0$. $\Omega_T = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_T} \nu_\gamma$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von elementar semi-algebraischen Mengen.

Pfadzerlegung

Satz:
Für alle Maschinen M über einem Integritätsbereich R gilt:

1. Sei $T > 0$. $\Omega_T = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_T} \nu_\gamma$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von elementar semi-algebraischen Mengen.
2. $\Omega_M = \bigcup_{\gamma \in \Gamma'_M} \nu_\gamma$ ist eine abzählbare disjunkte Vereinigung elementar semi-algebraischer Mengen.

Pfadzerlegung

Satz:
Für alle Maschinen M über einem Integritätsbereich R gilt:

1. Sei $T > 0$. $\Omega_T = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_T} \nu_\gamma$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von elementar semi-algebraischen Mengen.
2. $\Omega_M = \bigcup_{\gamma \in \Gamma'_M} \nu_\gamma$ ist eine abzählbare disjunkte Vereinigung elementar semi-algebraischer Mengen.
3. Für jedes $\gamma \in \Gamma_M$ ist Φ_M polynomielle oder rationale Abbildung.

Pfadzerlegung

Beweis:

- **1)** Nach dem Lemma sind ν_γ disjunkt und elementar semi-algebraisch.

Pfadzerlegung

Beweis:

- **1)** Nach dem Lemma sind ν_γ disjunkt und elementar semi-algebraisch.
  Γ_T hat höchstens 2^T Elemente, denn die Maschine hat in jedem Schritt höchstens 2 mögliche Nachfolgeknoten. Nach T Rechenschritten gibt es also höchstens 2^T mögliche verschiedene Pfade.

Pfadzerlegung

- **2)** Wie oben sind die ν_γ elementar semi-algebraisch.

Pfadzerlegung

- **2)** Wie oben sind die ν_γ elementar semi-algebraisch. Die Vereinigung ist
  - disjunkt, da die ν_γ disjunkt sind (wie oben), und mit $\gamma \in \Gamma'_M$ sichergestellt wird, dass der Pfad einer nach Zeit T haltenden Berechnung nicht für ein $T' > T$ noch einmal ausgewählt wird.

Pfadzerlegung

- **2)** Wie oben sind die ν_γ elementar semi-algebraisch.
  Die Vereinigung ist
  - disjunkt, da die ν_γ disjunkt sind (wie oben), und mit $\gamma \in \Gamma'_M$ sichergestellt wird, dass der Pfad einer nach Zeit T haltenden Berechnung nicht für ein $T' > T$ noch einmal ausgewählt wird.
  - abzählbar, da Γ_T maximal 2^T, d.h. abzählbar viele, Elemente hat (wie oben), und $T \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ abzählbar ist.

Pfadzerlegung

- **2)** Wie oben sind die ν_γ elementar semi-algebraisch. Die Vereinigung ist
  - disjunkt, da die ν_γ disjunkt sind (wie oben), und mit $\gamma \in \Gamma'_M$ sichergestellt wird, dass der Pfad einer nach Zeit T haltenden Berechnung nicht für ein $T' > T$ noch einmal ausgewählt wird.
  - abzählbar, da Γ_T maximal 2^T, d.h. abzählbar viele, Elemente hat (wie oben), und $T \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ abzählbar ist.
- **3)** Φ ist definiert als die Verknüpfung der Berechnungen, alle Berechungen sind Polynome oder rationale Abbildungen.

Unberechenbarkeit

Satz:
Die folgenden Mengen sind BCSS-unentscheidbar / die Funktionen sind BCSS-unberechenbar:

Unberechenbarkeit

Satz:
Die folgenden Mengen sind BCSS-unentscheidbar / die Funktionen sind BCSS-unberechenbar:

a) $\mathbb{Q}$

Unberechenbarkeit

Satz:
Die folgenden Mengen sind BCSS-unentscheidbar / die Funktionen sind BCSS-unberechenbar:

a) $\mathbb{Q}$
b) ILP, d.h. die Existenz einer ganzzahligen Lösung eines Systems linearer Ungleichungen mit reellen Koeffizienten

Unberechenbarkeit

Satz:
Die folgenden Mengen sind BCSS-unentscheidbar / die Funktionen sind BCSS-unberechenbar:

a) $\mathbb{Q}$

b) ILP, d.h. die Existenz einer ganzzahligen Lösung eines Systems linearer Ungleichungen mit reellen Koeffizienten

c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt{x}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto exp(x)$

Unberechenbarkeit

Satz:
Die folgenden Mengen sind BCSS-unentscheidbar / die Funktionen sind BCSS-unberechenbar:

a) $\mathbb{Q}$

b) ILP, d.h. die Existenz einer ganzzahligen Lösung eines Systems linearer Ungleichungen mit reellen Koeffizienten

c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt{x}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto exp(x)$

d) Die Mandelbrotmenge sowie die Menge der Startpunkte, sodass die Newtonmethode für die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ konvergiert

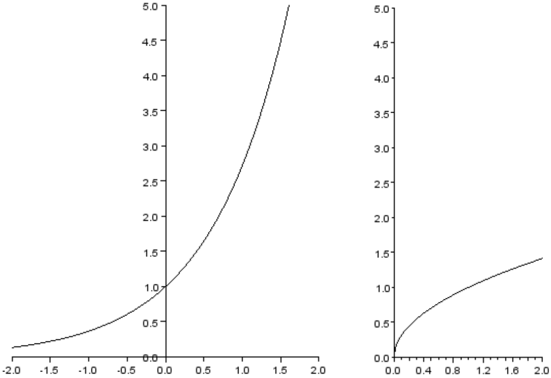


Abbildung: e-Funktion und Wurzelfunktion

Definitionen und Hilfsaussagen

- **Definition:**
  Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn man ihn nicht in zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen zerlegen kann.

Definitionen und Hilfsaussagen

- **Definition:**
  Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn man ihn nicht in zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen zerlegen kann.
- **Beispiel:**
  $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist zusammenhängend.

Definitionen und Hilfsaussagen

- **Definition:**
  Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn man ihn nicht in zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen zerlegen kann.
- **Beispiel:**
  $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist zusammenhängend.
- **Hilfssatz:**
  Jede semi-algebraische Menge hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Unberechenbarkeit

Beweis des Satzes:

a) Wie wir schon gesehen haben, sind alle von BCSS-Maschinen entscheidbaren Mengen abzählbar semi-algebraisch.

Unberechenbarkeit

Beweis des Satzes:

a) Wie wir schon gesehen haben, sind alle von BCSS-Maschinen entscheidbaren Mengen abzählbar semi-algebraisch.
Angenommen, $\mathbb{Q}$ ist entscheidbar.

Unberechenbarkeit

Beweis des Satzes:

a) Wie wir schon gesehen haben, sind alle von BCSS-Maschinen entscheidbaren Mengen abzählbar semi-algebraisch.
Angenommen, $\mathbb{Q}$ ist entscheidbar.
$\Rightarrow \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ist entscheidbar

Unberechenbarkeit

Beweis des Satzes:

a) Wie wir schon gesehen haben, sind alle von BCSS-Maschinen entscheidbaren Mengen abzählbar semi-algebraisch.
Angenommen, $\mathbb{Q}$ ist entscheidbar.
$\Rightarrow \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ist entscheidbar
$\Rightarrow \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ hat nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.

Beweis des Satzes:

a) Wie wir schon gesehen haben, sind alle von BCSS-Maschinen entscheidbaren Mengen abzählbar semi-algebraisch.
Angenommen, $\mathbb{Q}$ ist entscheidbar.
$\Rightarrow \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist entscheidbar
$\Rightarrow \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ hat nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.
Aber $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ hat überabzählbar unendlich viele isolierte Punkte, also überabzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten.
Widerspruch.

Unberechenbarkeit

d) **i)** Auch die Mandelbrotmenge ist keine abzählbare Vereinigung semi-algebraischer Mengen.

Unberechenbarkeit

d) **i)** Auch die Mandelbrotmenge ist keine abzählbare Vereinigung semi-algebraischer Mengen.

ii) Die Menge der Startpunkte, sodass die Newtonmethode für die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ nicht konvergiert, ist eine Cantormenge.

Unberechenbarkeit

d) **i)** Auch die Mandelbrotmenge ist keine abzählbare Vereinigung semi-algebraischer Mengen.

ii) Die Menge der Startpunkte, sodass die Newtonmethode für die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ nicht konvergiert, ist eine Cantormenge.
Eine Cantormenge ist ebenfalls keine abzählbare Vereinigung semi-algebraischer Mengen, da sie aus überabzählbar vielen einzelnen Punkten besteht.

Unberechenbarkeit

b) Betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$ax \leq y \quad ax \geq y \quad x \geq 1$$

Unberechenbarkeit

b) Betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$ax \leq y \quad ax \geq y \quad x \geq 1$$

Für die Lösung (x, y) gilt:
$(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{Q}$

Unberechenbarkeit

b) Betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$ax \leq y \quad ax \geq y \quad x \geq 1$$

Für die Lösung (x, y) gilt:
$(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{Q}$
Könnte man also ILP entscheiden, so auch $\mathbb{Q}$.
Widerspruch.

Unberechenbarkeit

c) Nach dem Satz zur Pfadzerlegung kann eine BCSS-Maschine nur rationale Abbildungen berechnen.
Weder $\sqrt{x}$ noch $exp(x)$ sind rationale Abbildungen:

Unberechenbarkeit

c) Nach dem Satz zur Pfadzerlegung kann eine BCSS-Maschine nur rationale Abbildungen berechnen.
Weder $\sqrt{x}$ noch $exp(x)$ sind rationale Abbildungen:
- Annahme: $exp(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für zwei Polynome mit Grad $\leq d$.

Unberechenbarkeit

c) Nach dem Satz zur Pfadzerlegung kann eine BCSS-Maschine nur rationale Abbildungen berechnen.
Weder $\sqrt{x}$ noch $exp(x)$ sind rationale Abbildungen:

- Annahme: $exp(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für zwei Polynome mit Grad $\leq d$.
  $\Leftrightarrow \; q(x) \cdot \exp(x) = p(x)$

Unberechenbarkeit

c) Nach dem Satz zur Pfadzerlegung kann eine BCSS-Maschine nur rationale Abbildungen berechnen.
Weder $\sqrt{x}$ noch $exp(x)$ sind rationale Abbildungen:

- Annahme: $exp(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für zwei Polynome mit Grad $\leq d$.
  $\Leftrightarrow \; q(x) \cdot \exp(x) = p(x)$
  Nach $d+1$-fachem Ableiten verschwindet die rechte Seite, während die linke Seite aus $exp(x) \cdot \widetilde{q}(x)$ mit $deg(\widetilde{q}(x)) = deg(q(x))$ besteht.

Unberechenbarkeit

c) Nach dem Satz zur Pfadzerlegung kann eine BCSS-Maschine nur rationale Abbildungen berechnen.
Weder $\sqrt{x}$ noch $exp(x)$ sind rationale Abbildungen:

- Annahme: $exp(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für zwei Polynome mit Grad $\leq d$.
  $\Leftrightarrow \; q(x) \cdot \exp(x) = p(x)$
  Nach $d+1$-fachem Ableiten verschwindet die rechte Seite, während die linke Seite aus $exp(x) \cdot \widetilde{q}(x)$ mit $deg(\widetilde{q}(x)) = deg(q(x))$ besteht.
- Definiere $deg\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = deg(p(x)) - deg(q(x))$.
  Annahme: $\sqrt{x} = \frac{p(x)}{q(x)}$

Unberechenbarkeit

c) Nach dem Satz zur Pfadzerlegung kann eine BCSS-Maschine nur rationale Abbildungen berechnen.
Weder $\sqrt{x}$ noch $exp(x)$ sind rationale Abbildungen:

- Annahme: $exp(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für zwei Polynome mit Grad $\leq d$.
  $\Leftrightarrow \; q(x) \cdot \exp(x) = p(x)$
  Nach $d+1$-fachem Ableiten verschwindet die rechte Seite, während die linke Seite aus $exp(x) \cdot \widetilde{q}(x)$ mit $deg(\widetilde{q}(x)) = deg(q(x))$ besteht.
- Definiere $deg\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = deg(p(x)) - deg(q(x))$.
  Annahme: $\sqrt{x} = \frac{p(x)}{q(x)}$
  Es folgt
  $$1 = deg(id) = deg((\sqrt{x})^2) = 2deg(\sqrt{x})$$
  sodass $deg(\sqrt{x}) \notin \mathbb{Z}$.

Berechenbarkeit

Satz:
$\mathbb{Q}$ ist semi-entscheidbar.

Satz:
$\mathbb{Q}$ ist semi-entscheidbar.
Beweis:
Für $z \in \mathbb{R}$ können systematisch alle Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ durchprobiert werden:

Berechenbarkeit

Satz:
$\mathbb{Q}$ ist semi-entscheidbar.
Beweis:
Für $z \in \mathbb{R}$ können systematisch alle Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ durchprobiert werden:
Gilt $z = \frac{x}{y}$, so akzeptiere, sonst teste das nächste Paar.

Berechenbarkeit

Satz:

$$f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \quad x \notin \mathbb{Q} \wedge x^2 \in \mathbb{Q} \\ \perp & : \quad x^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist BCSS-berechenbar.

Beweis:
Teste wie eben, ob $x^2 \in \mathbb{Q}$ gilt.

Berechenbarkeit

Beweis:
Teste wie eben, ob $x^2 \in \mathbb{Q}$ gilt.
Falls ja, wurde $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ gefunden, sodass $x^2 = \frac{a}{b}$ gilt.
Mache a, b koprim (d.h. kürze den Bruch)

Beweis:
Teste wie eben, ob $x^2 \in \mathbb{Q}$ gilt.
Falls ja, wurde $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ gefunden, sodass $x^2 = \frac{a}{b}$ gilt.
Mache a, b koprim (d.h. kürze den Bruch)
und teste dann, ob a', b' Quadratzahlen sind.
Falls ja, gebe 1 aus, sonst gebe 0 aus.

Berechenbarkeit

- **Satz:**
  Jedes diskrete Problem ist entscheidbar.

Berechenbarkeit

- **Satz:**
  Jedes diskrete Problem ist entscheidbar.
  Beweis:
  Diskrete Mengen sind abzählbar, also abzählbare Vereinigung semi-algebraischer Mengen.

Quellen

Complexity and real Computation, Blum, Cucker, Shub, Smale, Springer 1998
Real Computability and Hypercomputation, Martin Ziegler, 2007