IV Qualitative Theorie

Ziel dieses Kapitels ist es einen kurzen Einblick in das qualitative Verhalten gewöhnlicher Differentialgleichungen zu geben. Diese Fragestellung ist eng mit dem Langzeitverhalten von Lösungen, d.h. mit der sogenannten Stabilitätstheorie verbunden.
Im ersten Abschnitt untersuchen wir das Prinzip der linearisierten Stabilität, welches es erlaubt, aus der Lage des Spektrums des in einem kritischen Punkt linearisierten Vektorfeldes, Aussagen über die Stabiltät des kritischen Punktes zu treffen. Die Aussagen dieses Prinzips lassen sich anhand sogenannter Räuber-Beute-Modelle und speziell anhand des Volterra-Lotka-Modells gut veranschaulichen.
Der zweite Abschnitt widmet sich der Ljapunovschen Stabilitätstheorie, die von dem russischen Mathematiker A.M. LJAPUNOV (1857-1918) in seiner Dissertation im Jahre 1892 eingeführt wurde. Diese Methode hat sich zu einem sehr nützlichen Werkzeug der Stabilitätstheorie entwickelt und beruht auf dem Begriff der Ljapunovfunktion, den man als verallgemeinerten Abstand zum Nullpunkt ansehen kann. Hauptergebnis dieses Abschnitts ist dann der sogenannte Ljapunovsche Stabilitätssatz für reelle autonome Systeme. Es soll an dieser Stelle aber jedoch auch betont werden, dass ein allgemeines Rezept zur Konstruktion von Ljapunovfunktionen nicht existiert; in konkreten Fällen sind häufig physikalische Überlegungen, wie etwa Energiefunktionale, von Nutzen.

1 Das Prinzip der linearisierten Stabilität

In diesem Abschnitt wollen wir erste Aussagen über das qualitative Verhalten von Lösungen von Differentialgleichungen erzielen.
Wir erinnern zunächst an den Begriff der Stabilität der Gleichung

$$(1.1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)), \quad t \in I \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

mit einer rechten Seite $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$, welche stetig in der ersten Koordinate und lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Koordinate ist.
Gilt $f(\cdot, 0) = 0$, so besitzt die Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ die globale Nulllösung $y \equiv 0$. Diese Nulllösung heißt *stabil*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für die

Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

für alle x_0 mit $|x_0| < \delta$ gilt:

$$|u(t)| < \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

Ist die Nulllösung nicht stabil, so heißt sie *instabil*. Ferner heißt die Nulllösung *asymptotisch stabil*, falls sie stabil ist und falls zusätzlich

$$\lim_{t \to \infty} |u(t)| = 0$$

gilt.
Im Folgenden betrachten wir Systeme der Form

$$y'(t) = Ay(t) + g(t, y), \tag{1.2}$$

wobei A eine $n \times n$-Matrix und g eine in einem geeignenten Sinne kleine Störung des Systems bezeichnet. Genauer gesagt soll im Folgenden gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0$$

gleichmäßig in $t \in I$, das gestörte System (1.2) dasselbe asymptotische Stabilitätsverhalten wie die ungestörte Gleichung $y' = Ay$, d.h. also die „Linearisierung", besitzt.
Ist A eine $n \times n$-Matrix, so bedeutet im Folgenden der Ausdruck

$$\operatorname{Re} \sigma(A) < 0,$$

dass $\operatorname{Re} \lambda < 0$ gilt für alle Eigenwerte λ von A, d.h. für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

1.1 Satz. (Stabilitätssatz).
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$. Ferner sei $g : (I \times D, \mathbb{C}^n)$ eine Funktion, welche stetig in der ersten und lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Koordinate ist und für welche

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0, \quad \textit{gleichmäßig in } t \in I$$

gilt. Dann ist die Nulllösung der Gleichung

$$y'(t) = Ay(t) + g(t, y(t))$$

asymptotisch stabil.

Beweis. Nach Theorem III.4.1 impliziert die Spektralbedingung $\mathrm{Re}\,\sigma(A) < 0$, dass Konstanten $M \geq 1$ und $\alpha < 0$ existieren mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt die Gleichung (1.2) genau eine Lösung, welche nach dem Satz über die Variation der Konstanten als Lösung der Integralgleichung

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s, y(s))ds$$

dargestellt werden kann. Die Voraussetzung an g impliziert, dass für $\varepsilon \in (0, \alpha)$ ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ existiert mit

$$|g(t, y)| \leq \frac{\varepsilon}{M}|y|, \qquad |y| \leq \delta, t \geq 0.$$

Einsetzen in die Integralgleichung liefert

$$|y(t)| \leq Me^{-\alpha t}|y_0| + \int_0^t Me^{-\alpha(t-s)}\frac{\varepsilon}{M}|y(s)|ds, \qquad \text{für } |y| \leq \delta.$$

Sei nun y eine Lösung von (1.2) mit $|y(0)| \leq \frac{\delta}{M}$. Setzt man $\Phi(t) := |y(t)|e^{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$, so folgt

$$\Phi(t) \leq \delta + \varepsilon \int_0^t \Phi(s)ds.$$

Das Lemma von Gronwall impliziert daher $\Phi(t) \leq \delta e^{\varepsilon t}$ und somit gilt

$$|y(t)| \leq \delta e^{(\varepsilon-\alpha)t} < \delta, \qquad t \geq 0.$$

Zusammenfassend folgt somit die Behauptung.

□

Existiert in der obigen Situation ein Eigenwert λ von A mit $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, so gilt der folgende Instabilitätssatz, welchen wir an dieser Stelle nicht beweisen wollen.

1.2 Satz. (Instablitätssatz).
Es sei g wie im obigen Satz 1.1, die Matrix A besitze jedoch einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. *Dann ist die Nulllösung der Gleichung*

$$y'(t) = Ay(t) + g(t, y(t))$$

instabil.

Als Anwendung der beiden obigen Resultate betrachten wir die Linearisierung autonomer Systeme. Genauer gesagt betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(y(t)) \tag{1.3}$$

mit einer Funktion f, welche nicht explizit von t abhängt. Wir nehmen an, dass $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von 0 ist und dass $f \in C^1(D)$ gilt. Gilt $f(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in D$, so heißt y_0 kritischer Punkt von f; der Punkt y_0 wird stabil bzw. instabil genannt, wenn die konstante Lösung $u(t) = y_0$ für alle $t \in I$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.
Im Weiteren sei 0 ein kritischer Punkt von f, d.h. es gelte $f(0) = 0$. Wegen der Differenzierbarkeit von f gilt die Darstellung

$$f(y) = f(0) + Df(0)y + f(y) - Df(0)y = Ay + g(y),$$

mit

$$\begin{aligned} Ay &:= Df(0)y, \qquad \text{und} \\ g(y) &:= f(y) - Df(0)y \qquad \text{mit } \lim_{|y|\to 0} \frac{g(y)}{|y|} = 0. \end{aligned}$$

Wir können also die ursprüngliche Gleichung (1.3) in der Form

$$y'(t) = Ay(t) + g(y(t))$$

darstellen. Die obigen Stabilitäts- bzw. Instablitätssätze implizieren dann das folgende fundamentale *Prinzip der linearisierten Stabilität* für kritische Punkte autonomer Differentialgleichungen. Dieses Prinzip besitzt unzählige Anwendungen.

1.3 Theorem. (Prinzip der linearisierten Stabilität).
Ist $f \in C^1(D, \mathbb{C}^n)$ mit $f(y_0) = 0$, so gelten die folgenden Aussagen.

a) *Gilt $\operatorname{Re}\sigma(Df(y_0)) < 0$, so ist der kritische Punkt y_0 der Gleichung $y' = f(y)$ asymptotisch stabil.*

b) *Gilt $\sigma(Df(y_0)) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \neq \emptyset$, so ist y_0 instabil.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Sätzen 1.1 und 1.2.

1.4 Beispiel. (Räuber-Beute-Modelle).
Im Folgenden betrachten wir sogenannte *Räuber-Beute-Modelle*; dies sind Zweipopulationsmodelle, wobei $x(t)$ die Population der Beute zur Zeit t und $y(t)$ die Population der Räuber zur Zeit t bezeichnet. Für jede Population nehmen wir eine der schon in Kapitel I betrachteten Wachstumsgleichungen der Form

$$x'(t) = r_1(t, x, y)x(t), \qquad y'(t) = r_2(t, x, y)y(t)$$

an.
a) Wir betrachten zunächst ein *Modell mit konstanten Wachstumsraten.* Ein Ansatz für die Wachstumsrate der Beutespezies ist durch

$$r_1(t,x,y) = \alpha - \beta y$$

mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gegeben. Er läßt sich wie folgt interpretieren: sind keine Räuber vorhanden (d.h. $y = 0$), so entwickelt sich die Beutepopulation mit konstantem Wachstum. Die Anwesenheit von Räubern verringert diese Wachstumsrate und zwar proportional zur Räuberpopulation. Für die Wachstumsrate der Räuberspezies machen wir den analogen Ansatz

$$r_2(t,x,y) = -\gamma + \delta x,$$

mit der Interpretation, dass die Räuberspezies mit der Rate γ ausstirbt, sofern keine Beute (d.h. $x = 0$) vorhanden ist.
Unter diesen Annahmen erhält man die sogenannten *Volterra-Lotka-Gleichungen*

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x, \\ y' &= (\delta x - \gamma)y \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Setzt man $p(t) = (x(t), y(t))$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) := ((\alpha - \beta y)x, (\delta x - \gamma)y),$$

so kann man dieses System in der Form

$$p'(t) = f(p(t))$$

schreiben und wir wollen die kritischen Punkte von f auf ihre Stabilität hin diskutieren. Wir verifizieren leicht, dass dieses System die kritischen Punkte $(0,0)$ und $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ besitzt. Weiter gilt

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

und somit

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad Df(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität ist somit der Punkt $(0,0)$ instabil. Für den zweiten kritischen Punkt können die Eigenwerte von $Df(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ zu $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ bestimmt werden. In diesem Fall ist der kritische Punkt $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ ein Zentrum der linearisierten Gleichung, für das nichtlineare System hingegen kann mit dem Prinzip der linearisierten Stabilität keine Aussage getroffen werden.
Wir können jedoch oBdA y lokal in Abhängigkeit von x als

$$y'(x) = \frac{\gamma x - \delta}{x} \frac{y}{\alpha - \beta y}$$

darstellen und erhalten mittels der Methode der Trennung der Variablen dann die Relation

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}}\frac{x^\delta}{e^{\gamma x}} = C.$$

Daher ist das Phasenportrait und die Graphen von x und y von der folgenden Form:

Der Verlauf kann heuristisch wie folgt interpretiert werden: Ausgehend von einer kleinen Räuber- bzw. Beutepopolation, wächst zunächst die Beutepopulation stärker, da wenig Räuber vorhanden sind. Später wächst dann die Räuberpopulation, da sie reichlich Beute finden. Dadurch verringert sich die Beutepopulation und zeitversetzt auch die Räuberpopulation, da der Beutevorrat reduziert ist. Das System kehrt dann wieder in seinen Ausgangszustand zurück.
Diese Plausibilitätsüberlegungen lassen sich durch eine Analyse der Funktionen

$$g(x) = \frac{x^\delta}{e^{\gamma x}} \qquad \text{und} \qquad h(y) = \frac{y^\alpha}{e^\beta y}, \qquad x, y > 0$$

natürlich auch präzisieren und wir können zeigen, dass jeder Orbit eine geschlossene Kurve im ersten Quadranten ist, die den krititischen Punkt $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ im mathematisch positiven Sinne umläuft. Die Lösungen sind daher periodisch. Die Details seien dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen.
b) Betrachtet man ein verallgemeinertes Modell, das sogenannte Räuber-Beute-Modell mit *beschränktem Wachstum*, d.h. das System

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y - \lambda x)x, \\ y' &= (\delta x - \gamma - \mu y)y \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu > 0$, so ist insbesondere der Punkt $(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ ein kritischer Punkt dieses Systems. Die im Vergleich zum Volterra-Lotka-Modell zusätzlich vorhandenen Terme verhindern, dass bei Abwesenheit der Räuber die Beutepopulation unbeschränkt wächst.
Man zeige als Übungsaufgabe, dass der kritische Punkt $(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ asymptotisch stabil ist für den Fall $\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{\gamma}{\delta}$ bzw. instabil ist im Falle $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$.
c) Die obigen Modelle gehen auf Alfred James LOTKA (1880-1949) und Vito VOLTERRA (1860-1940) zurück. Ersterer erzielte wichtige Beiträge zur Biomathematik. Der italiensche Mathematiker Volterra wurde durch seine Beiträge zu Integralgleichungen bekannt.

Ausgehend von dem obigen Beispiel stellt sich die Frage, ob die strukturelle Ähnlichkeit zwischen dem linearen System

$$y' = Ay \tag{1.4}$$

und dem gestörten System

$$y' = Ay + g(t, y) \tag{1.5}$$

noch tiefer reicht und insbesondere die Phasenbilder mit einbezieht. Der folgende Linearisierungsatz von Grobmann-Hartmann (zuerst bewiesen in den Jahren 1959 bzw. 1963) gibt eine sehr befriedigende Antwort auf diese Frage.

1.5 Theorem. (Linearisierungssatz von Grobmann und Hartmann).
Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von 0, $f \in C^1(D)$ eine Funktion mit $f(0) = 0$ und $\sigma(Df(0)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.
Dann existieren Umgebungen U, V von 0 und ein Homöomorphismus $U \to V$, der die Orbits der linearen Gleichung (1.4) *in U in die Orbits der nichtlinearen Gleichung* (1.5) *in V überführt.*

Der Beweis dieses Satzes ist nicht einfach und übersteigt den Rahmen einer einführenden Vorlesung; wir verweisen an dieser Stelle auf die Literatur. Das obige Theorem zeigt jedoch klar, dass Linearisierungen ein vortreffliches Mittel zum Studium nichtlinearer autonomer Systeme in der Umgebung kritischer Punkte sind.

1.6 Beispiel. (Mathematisches Pendel).
Die Gleichung des mathematischen Pendels lautet

$$u'' + \sin u = 0.$$

Als System geschrieben lautet es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}.$$

Es besitzt die kritischen Punkte $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ und die zugehörigen Linearisierungen lauten

$$A = Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad A = Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Fall besitzt die Matrix A die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Es liegt also ein Sattelpunkt vor. Nach dem obigen Linearisierungssatz besitzt das Phasenportrait des mathematischen Pendels in einer Umgebung von $(\pi, 0)$ ebenfalls Sattelpunktstruktur.

Im ersten Fall stimmt das Phasenportrait der Linearisierung mit demjenigen des harmonischen Oszillators überein; es handelt sich um Kreise um den Nullpunkt. Auch das Phasenportrait des mathematischen Pendels zeigt geschlossene, nahezu kreisförmige Kurven um 0. Dies kann man jedoch nicht aus dem Linearisierungssatz folgern, da die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i$ von A nicht die Voraussetzungen des Linearisierungssatzes erfüllen.

2 Ljapunov-Stabilität