III Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen bilden eine wichtige Klasse von Differentialgleichungen. Besonders zu erwähnen ist, dass die Menge der Lösungen für diese Gleichungen im Wesentlichen eine Vektorraumstruktur besitzt und daher viele Verbindungen zur Linearen Algebra geknüpft werden können. Von besonderem Interesse sind Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, welche in Abschnitt 2 ausführlich behandelt werden.
Lineare Differentialgleichungen erscheinen auf den ersten Blick leichter zu behandeln zu sein als nichtlineare Gleichungen. Dies ist richtig im Hinblick auf ihre eindeutige Lösbarkeit, eine Eigenschaft, welche direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt. Dennoch sind viele lineare Differentialgleichungen nicht elementar lösbar. Die Techniken zur Behandlung linearer Differentialgleichungen werden daher in diesem Kapitel systematisch entwickelt. Wir beginnen mit der Situation von homogenen linearen Differentialgleichungen.

1 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Systeme linearer Differentialgleichungen der Form

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) & = & A(t)y(t) + b(t), & t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0, & \end{array} \right. \tag{1.1}$$

wobei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$ stetige Funktionen sind und $t_0 \in I$ für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ gilt. Identifizieren wir $A(t)$ mit seiner Matrixdarstellung und schreiben b in Vektordarstellung, d.h.

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

so lautet das obige Anfangswertproblem explizit ausgeschrieben

$$\begin{array}{rcccccccc} y_1'(t) & = & a_{11}(t)y_1(t) & + & \dots & + & a_{1n}(t)y_n(t) & + & b_1(t) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ y_n'(t) & = & a_{n1}(t)y_1(t) & + & \dots & + & a_{nn}(t)y_n(t) & + & b_n(t). \end{array}$$

Wir notieren ferner, dass nach den Überlegungen aus der Analysis II, auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ jeweils alle Normen äquivalent sind. Insbesondere ist der Begriff der Stetigkeit nicht von der gewählten Norm abhängig. Zumeist werden wir hier die euklidische Norm $|\cdot|$ oder die Supremumsnorm $|\cdot|_\infty$ auf $\mathbb{C}^n$ und die zugehörige Operatornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^{n\times n}$ benutzen.

1.1 Satz. *Unter den obigen Voraussetzungen an A und b existiert zu jedem $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems* (1.1).

Unter einer Lösung verstehen wir natürlich wie bisher eine Funktion $u \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$, welche (1.1) erfüllt.

Beweis. Ist I ein kompaktes Intervall, so folgt die Behauptung sofort aus dem Satz von Picard-Lindelöf, denn für $f(t,x) := A(t)x + b(t)$ gilt

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |A(t)(x_1 - x_2)| \leq \sup_{t\in I} \| A(t) \| \, |x_1 - x_2|$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$, d.h. f ist global Lipschitz-stetig. Ist I ein beliebiges Intervall, so kann I durch kompakte, t_0 enthaltende Intervalle ausgeschöpft werden und somit folgt die Behauptung für jedes I.

□

In folgendem Satz zeigen wir, dass die Gesamtheit aller Lösungen der homogenen Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ einen n-dimensionalen Teilraum von $C^1(I, \mathbb{C}^n)$ bildet.

1.2 Satz. *In der Situation von Satz 1.1 sei $t_0 \in I$ fest.*
a) Dann definiert die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} T : C^1(I, \mathbb{C}^n) & \to & C(I, \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \\ y & \mapsto & (y' - Ay, y(t_0)) \end{array}$$

einen Vektorraumisomorphismus.
b) Es sei $S : C^1(I, \mathbb{C}^n) \to C(I, \mathbb{C}^n)$ die Abbildung gegeben durch $y \mapsto y' - Ay$ und $\ker S := \{y \in C^1(I, \mathbb{C}^n) : Sy = 0\}$. *Damit ist die Abbildung* $\ker S \to \mathbb{C}^n$, $y \mapsto y(t_0)$ *ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere gilt* $\dim \ker S = n$.

Beweis. Die Linearität der Abbildungen kann elementar überprüft werden. Die jeweiligen Injektitivitäts- bzw. Surjektivitätsaussagen folgen aus der in Satz 1.1 festgestellten eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems (1.1).

□

1.3 Korollar. *Es existieren genau n linear unabhängige Lösungen der Gleichung* $y'(t) = A(t)y(t)$ *in* $C^1(I, \mathbb{C}^n)$. *Eine Menge* $\{z_1, \ldots, z_n\}$ *von Lösungen von* (1.1) *ist genau dann eine Basis von* $\ker S$, *wenn die Menge der Vektoren* $\{z_1(t_0), \ldots, z_n(t_0)\}$ *eine Basis von* $\mathbb{C}^n$ *ist.*

Dies folgt direkt aus Satz 1.2.

1.4 Definition.
a) Es sei $\{z_1, \ldots, z_n\}$ eine Menge von Lösungen der Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$. Dann heißt die aus den Spalten gebildete Matrix $Z := (z_1, \ldots, z_n) : I \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ die *Wronski-Matrix* und $w(t) = \det Z(t)$ die *Wronski-Determinante*.
b) Eine Basis $\{z_1, \ldots, z_n\}$ des Lösungsraums der Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ heißt *Fundamentalsystem*. In diesem Fall heißt die Wronski-Matrix *Fundamentalmatrix*.

1.5 Bemerkungen.
a) Es seien $z_1, \ldots, z_n$ Lösungen der Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$. Nach Korollar 1.3 ist $\{z_1, \ldots, z_n\}$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $w(t) = \det Z(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ und genau dann, wenn $w(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$ gilt.
b) Die Wronski-Matrix Z löst die Gleichung

$$Z'(t) = A(t)Z(t),$$

wobei die Ableitung $Z'(t)$ komponentenweise definiert ist. Ist Z eine Fundamentalmatrix, so ist eine Funktion $z \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ genau dann eine Lösung von $y'(t) = A(t)y(t)$, wenn ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $z(t) = Z(t)c$ für $t \in I$.

1.6 Satz. (Satz von Liouville). *Die Wronski-Determinante* w *ist differenzierbar und es gilt* $w'(t) = (\text{spur } A(t))w(t)$ *für alle* $t \in I$. *Somit gilt ferner*

$$w(t) = w(t_0) \exp\Big(\int_{t_0}^t \text{spur } A(s)ds \Big).$$

Beweis. Nach Bemerkung 1.5.a) können wir oBdA annehmen, dass $w(t) = \det Z(t) \neq 0$ ist für alle $t \in I$. Somit ist

$$B(t) := Z(t)^{-1}A(t)Z(t), \quad t \in I,$$

wohldefiniert und es gilt nach Bemerkung 1.5.b) $Z'(t) = A(t)Z(t) = Z(t)B(t)$. Für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt daher

$$z_j'(t) = (Z(t)e_j)' = Z'(t)e_j = Z(t)B(t)e_j = \sum_{k=1}^n b_{kj}(t)z_k(t)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
w'(t) &= [\det\big(z_1(t),\dots,z_n(t)\big)]' \\
&\overset{\text{UA}}{=} \sum_{j=1}^{n} \det(z_1(t),\dots,z_j'(t),\dots,z_n(t)) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}(t)\det\big(z_1(t),\dots,z_{j-1}(t),z_k(t),z_{j+1}(t),\dots,z_n(t)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jj}(t)\det Z(t) \\
&= (\operatorname{spur} B(t))w(t) \overset{\text{LA}}{=} (\operatorname{spur} A(t))w(t).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$w(t) = w(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} \operatorname{spur} A(s)ds\Big).$$

1.7 Beispiel. Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= -y_2(t), \quad t\in I, \\
y_2'(t) &= y_1(t), \qquad t\in I,
\end{aligned}$$

d.h.

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t), \qquad t\in I.$$

Eine Fundamentalmatrix ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

da $\det Z(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ für alle $t \in I$ gilt. Ferner gilt

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die inhomogene, lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \tag{2.1}$$

wobei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$ stetige Funktionen sind und $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ gilt.

2.1 Satz. *Es sei $y_p \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ eine Lösung von* (2.1) *und $Z \in C^1(I, \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$ sei eine zugehörige Fundamentalmatrix. Dann ist jede Lösung der Gleichung* (2.1) *gegeben durch*

$$y(t) = y_p(t) + Z(t)c$$

für ein $c \in \mathbb{C}^n$.

Beweis. Es sei $y(t) = y_p(t) + Z(t)c$. Da

$$y'(t) = y_p'(t) + Z'(t)c = A(t)y_p(t) + b(t) + A(t)Z(t)c = A(t)y(t) + b(t)$$

gilt, ist jedes solche y eine Lösung von (2.1). Sei umgekehrt y eine beliebige Lösung von (2.1), so gilt für $\tilde{y} := y - y_p$

$$\tilde{y}' = y'(t) - y_p'(t) = A(t)y(t) + b(t) - A(t)y_p(t) - b(t) = A(t)\tilde{y}(t).$$

Somit gilt $\tilde{y}(t) = Z(t)c$ für ein $c \in \mathbb{C}^n$ nach Bemerkung 1.5. b).

□

2.2 Satz. (Variation der Konstanten).
Es sei $Z : I \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$. Dann ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I, \tag{2.2}$$

gegeben durch $y_p(t) = Z(t)c(t)$, wobei $c \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ eine Lösung der Gleichung $Z(t)c'(t) = b(t)$ ist, d.h. c ist bestimmt durch

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1}b(s)ds, \quad t \in I.$$

Beweis. Differenziert man y_p, so gilt

$$\big(Z(t)c(t)\big)' = Z'(t)c(t) + Z(t)c'(t) = A(t)Z(t)c(t) + Z(t)c'(t) = A(t)y_p(t) + Z(t)c'(t).$$

Es ist daher y_p genau dann eine Lösung der Gleichung (2.2), wenn $Z(t)c'(t) = b(t)$ gilt, also genau dann, wenn $c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1}b(s)ds$ für ein $t_0 \in I$ gilt.

□

2.3 Beispiel. Wir betrachten das schon im Beispiel 1.7 untersuchte System

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix},$$

jetzt versehen mit der Inhomogenität $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$. Nach Beispiel 1.7 ist eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Somit gilt wegen der Variation-der-Konstanten-Formel für $c(t)$

$$c(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds + \text{const.} = \int_0^t \begin{pmatrix} s \sin s \\ s \cos s \end{pmatrix} ds + \text{ const.}$$

Das obige Integral berechnet sich via partieller Ingegration zu

$$c(t) = \begin{pmatrix} -s\cos s + \sin s \\ s \sin s + \cos s \end{pmatrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t} = \begin{pmatrix} -t\cos t + \sin t \\ t \sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix},$$

und somit ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p(t) &= Z(t)c(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cos t + \sin t \\ t \sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t\cos^2 t + \cos t \sin t - t \sin^2 t - \sin t \cos t + \sin t \\ -t \sin t \cos t + \sin^2(t) + t \cos t \sin t + \cos^2 t - \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung hat schließlich die Form $y(t) = Z(t)d + y_p(t)$, wobei $d \in \mathbb{R}^2$ durch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ bestimmt ist.

2.4 Bemerkungen.
a) Betrachtet man das inhomogene Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \right. \tag{2.3}$$

unter den Voraussetzungen von Satz 1.1, so ist die eindeutig bestimmte globale Lösung von (2.3) gegeben durch

$$u(t) = Z(t)y_0 + Z(t) \int_{t_0}^t Z(s)^{-1} b(s) ds, \tag{2.4}$$

wobei hier $Z(t_0) = y_0$ gelten muss. Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.2.
b) Ist $Z : I \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$, $t \in I$, so ist die Abbildung $U : I \times I \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ gegeben durch

$$U(t,s) := Z(t)Z(s)^{-1}, \quad s,t \in I,$$

von Interesse. Es gilt nämlich

i) $U \in C^1(I \times I, \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$,

ii) $U(s,s) = \mathrm{Id}$ für alle $s \in I$,

iii)
$$\frac{d}{dt}U(t,s) = Z'(t)Z(s)^{-1} = A(t)Z(t)Z(s)^{-1} = A(t)U(t,s),$$
d.h. $U(\cdot, s)$ ist eine Fundamentalmatrix der Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ zum Zeitpunkt s.

c) Die obige Abbildung $U \in C^1(I \times I, \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$ heißt *Evolutionsoperator* und hat folgende Eigenschaften:

i) $U(s,s) = \mathrm{Id}$ für alle $s \in I$,

ii) $U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s)$ für alle $s,t \in I$ und $\tau \in [s,t]$.

Die Lösung der inhomogenen Gleichung (2.3) ist somit gegeben durch

$$u(t) = U(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)b(s)ds. \tag{2.5}$$

Dies ist die sogenannte *Duhamelsche Formel.*
d) Kennt man also eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems, so hat man mittels (2.5) ein komplettes Verständnis der inhomogenen Gleichung (2.1). Wir können uns daher auf die Bestimmung einer Fundamentalmatrix konzentrieren. Eine solche Bestimmung ist im Allgemeinen jedoch nicht explizit durchführbar, es sei denn man betrachtet Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, d.h. also Systeme der Form

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit einer festen Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

3 Systeme mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialgleichungssysteme der Form

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

mit einer $n \times n$ Matrix A über $\mathbb{C}$. Ist $n = 1$, so besitzt die skalare Gleichung $y' = ay$ klarerweise die Lösung $u(t) = ce^{ta}$ für beliebiges $c \in \mathbb{C}$. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Lösung u der Gleichung (3.1) durch $u(t) = e^{tA}$ zu bestimmen, wobei e^{tA} durch eine

Erweiterung der ExponentialFunktion auf Matrizen definiert wird.
Im Folgenden sei $|\cdot|$ die euklidische Norm und $\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}_+$ die zugehörige Operatornorm. Für zwei $n \times n$ Matrizen A, B gilt dann

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

d.h. die Norm $\|\cdot\|$ ist submultiplikativ.

3.1 Definition. Es sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$\exp(A) := e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

die *Exponentional-Funktion von A.*

Wir müssen uns zunächst vergewissern, dass die obige Festsetzung von e^A wohldefiniert ist. Da $\|A^j\| \leq \|A\|^j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt, folgt, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\frac{1}{j!} A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j = e^{\|A\|} < \infty$$

gilt. Dies bedeutet, dass die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} A^j$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist, da wir für $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so wählen können, dass $\sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{j!}\|A\|^j < \varepsilon$ gilt. Für $n > m > N_\varepsilon$ gilt dann

$$\|S_n - S_m\| = \| \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j!} A^j\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j!}\|A\|^j < \varepsilon,$$

und wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ konvergiert die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit ist e^A wohldefiniert für jede $n \times n$ Matrix A.

3.2 Lemma. *Es seien A, B zwei $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es gilt $e^{A+B} = e^A e^B$ falls $AB = BA$ gilt.

b) Setzt man $e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$, so gilt für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

  i) $e^{0A} := Id$,

  ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(e^{tA}) = A\, e^{tA}$

c) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, *d)* $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ *für alle* $s, t \in \mathbb{R}$,

e) $e^{tA+\lambda Id} = e^{\lambda} e^{tA}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$,

f) $e^{t\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

Für den Beweis verweisen wir auf die Übungen.

Somit können wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$
\begin{array}{rcll} y'(t) & = & Ay(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) & = & y_0, & \end{array} \tag{3.2}
$$

wie folgt beschreiben.

3.3 Theorem. *Es sei* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{C}$ *und* $y_0 \in \mathbb{C}^n$. *Dann ist die eindeutige Lösung* u *von* (3.2) *gegeben durch*

$$
u(t) = e^{tA}\, y_0.
$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 3.2 b).

3.4 Korollar. *Es sei* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{C}$, $y_0 \in \mathbb{C}^n$ *und* $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. *Dann ist die eindeutige Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$
\begin{array}{rcll} y(t) & = & Ay(t) + b(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) & = & y_0, & \end{array}
$$

gegeben durch

$$
u(t) = e^{tA} y_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

Dies folgt aus Satz 2.2 oder der in (2.4) angegebenen Darstellung der Lösung.

Mit dem obigen Theorem 3.3 haben wir die Bestimmung der Lösung der Gleichung $y'(t) = Ay(t)$ also auf die Berechnung von e^{tA} zurückgeführt. Um e^{tA} für eine gegebene $n \times n$ Matrix A explizit zu bestimmen, verwenden wir im Folgenden den aus der Linearen Algebra bekannten Satz über die Jordansche Normalform einer $n \times n$ Matrix A. Dieser besagt, dass zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix $S \in GL(n, \mathbb{C})$ existiert, derart dass

$$
S^{-1} A S = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & 0 \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\lambda_l} \end{pmatrix} =: J
$$

gilt, wobei J_{λ_i} für $i = 1, \dots, l$ die Jordan Kästchen der Dimension p_i zum Eigenwert λ_i bezeichnen, d.h. J_{λ_i} ist von der Form

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdot \\ & & \dots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}_{p_i \times p_i}$$

für geeignetes $p_i \in \mathbb{N}$. Ferner, da

$$(S^{-1}AS)^j = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\dots(S^{-1}AS) = S^{-1}A^jS$$

gilt, folgt

$$S^{-1}e^{tA}S = \sum_{j=0}^{\infty} S^{-1}\frac{1}{j!}t^jA^jS = e^{S^{-1}(tA)S}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter, da $tS^{-1}AS = S^{-1}(tA)S$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $S^{-1}(tA)S = tJ$ und somit gilt zusammenfassend

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_{\lambda_1}} & & & \\ & e^{tJ_{\lambda_2}} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tJ_{\lambda_l}} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R},$$

gilt und somit ist die Berechnung von e^{tJ} auf die Berechnung von $e^{tJ_{\lambda_i}}, i = 1, \dots, l,$ zurückgeführt. Ein Jordan-Kästchen J_{λ_i} ist nun aber von der Form $J_{\lambda_i} = \lambda_i Id + N_i$, wobei N_i eine nilpotente $p_i \times p_i$ Matrix der Gestalt

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

und λ_i ein Eigenwert von A ist. Da $\lambda_i Id$ und N_i kommutieren, folgt nach Lemma 3.2 a)

$$e^{tJ_{\lambda_i}} = e^{t\lambda_i I + tN_i} = e^{t\lambda_i}e^{tN_i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da $N_i^k = 0$ für $k \geq p_i$ ist, folgt

$$
(3.3) \qquad e^{tN_i} = \sum_{k=0}^{p_i - 1} \frac{t^k}{k!} N_i^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{p_i-2}}{(p_i-2)!} \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & \dots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

Zusammenfassend gilt

$$
e^{tA} = S e^{tJ} S^{-1}
$$

mit

$$
e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_{\lambda_1}} & & & \\ & e^{tJ_{\lambda_2}} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tJ_{\lambda_l}} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},
$$

und $e^{tN_{\lambda_i}}$ wie in (3.3).

Wir kommen zu der Berechnung der Transformationsmatrix S. Hierzu sei J_{λ_k} ein Jordan-Kästchen der Dimension p zu einem Eigenwert λ_k und zugehörigen Hauptvektoren $v_1, \dots, v_p$, welche durch

$$
(A - \lambda_k Id)^j v_p = 0, \quad j = 1, \dots, p,
$$

gegeben sind. Die Transformationsmatrix S aus dem Satz über die Jordansche Normalform besteht gerade aus den Hauptvektoren der Matrix A.

3.5 Theorem. *Für $j = 1, \dots, p$ seien v_j die Hauptvektoren der Stufe j zum Eigenwert λ der Matrix A. Dann ist*

$$
y_j(t) := e^{\lambda t}\big(v_j + t v_{j-1} + \frac{t^2}{2!} v_{j-2} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} v_1\big)
$$

eine Lösung der Gleichung $y' = Ay$.

Beweis. Nach Theorem 3.3 bilden die Spalten von e^{tA} ein Fundamentalsystem. Ferner ist für jedes $S \in GL(n, \mathbb{C})$ auch $Y(t) := e^{tA} S$ ein Fundamentalsystem, da

$$
\frac{d}{dt}(e^{tA} S) = A\, e^{tA} S \quad \text{und} \quad \det(e^{tA} S)|_{t=0} = \det S \neq 0
$$

gilt. Ist S die Transformationsmatrix aus der Jordanschen Normalform, so gilt $e^{tA} S = S e^{tJ}$. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass A nur ein Jordan-Kästchen

$J_\lambda = \lambda I + N$ zum Eigenwert λ der Dimension p besitzt. In diesem Fall gilt mit den Hauptvektoren $v_1, \dots, v_p$

$$\begin{aligned} Se^{tJ} &= e^{\lambda t}(v_1, \dots, v_p)e^{tN} \\ &= e^{\lambda t}(v_1, v_2 + tv_1, \dots, v_p + tv_{p-1} \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}v_1). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall besitzt A mehrere Jordan-Kästchen und die obige Darstellung ergibt die Spalten der Matrix $Y(t) = e^{tA}S$ und somit ein Fundamentalsystem.

□

3.6 Beispiel. Wir betrachten das System $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zunächst ist das charakterische Polynom $p_\lambda(A)$ von A gegeben durch

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) = \det(A - \lambda Id) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \quad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 1)^3. \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Der Eigenraum zu $\lambda = 1$ ist 2-dimensional und wird etwa durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Ein Hauptvektor ist gegeben durch $(1,0,0)^T$. Mit der Transformationsmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (v_1, v_3, v_2)$$

erhalten wir daher

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung der Gleichung $y' = Ay$ hat somit die Form

$$y(t) = c_1\, e^t v_1 + c_2\, e^t(v_3 + tv_1) + c_3\, e^t v_2$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

4 Stabilität und Klassifikation linearer Flüsse

Für viele Anwendungen ist nicht nur die Frage der eindeutigen Lösbarkeit einer Differentialgleichung wichtig, sondern auch die Frage nach deren qualitativem Verhalten. Inbesondere ist die Stabilität der Lösungen, also das Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$ von Interesse. Wir wollen in diesem Abschnitt nur einen kurzen Einblick in dieses Themengebiet geben und beschränken uns hier auf die Stabilität von Lösungen linearer Gleichungen. Nichtsdestotrotz werden diese Resultate in einem späteren Kapitel über Stabilitätstheorie nichtlinearer Gleichungen der Form $y'(t) = f(y(t))$ von großer Wichtigkeit sein.
Das im vorigen Abschnitt hergeleitete Resultat über die Struktur der Lösung u der Gleichung

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

für eine $n \times n$-Matrix A liefert die folgenden Aussagen über das Langzeitverhalten von u. Die Menge aller Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix wird auch als *Spektrum* $\sigma(A)$ von A bezeichnet, d.h. es gilt $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$. In dieser Notation gilt dann das folgende Resultat.

4.1 Theorem. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) Für jede Lösung der Gleichung (4.1) *gilt* $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

b) Es gilt $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *für alle* $\lambda \in \sigma(A)$.

Beweis. Es sei u eine Lösung der Gleichung (4.1). Nach den Resultaten des vorigen Abschnitts ist u eine Linearkombination von Termen der Form

$$t^m e^{\lambda t} x,$$

wobei λ ein Eigenwert von A ist und $x \in \mathbb{C}^n$ gilt. Da $|t^m e^{\lambda t} x| = t^m e^{\operatorname{Re}\lambda t}|x|$ für alle $t \geq 0$ gilt, folgt $u(t) \to 0$, genau dann wenn $\operatorname{Re}\lambda < 0$ gilt für alle Eigenwerte λ von A. $\square$

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Beschränktheit von Lösungen der Gleichung (4.1) charakterisieren.

4.2 Satz. (Charakterisierung der Beschränktheit der Lösungen).
Jede Lösung der Gleichung (4.1) *ist genau dann beschränkt, wenn*

i) $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ *für alle* $\lambda \in \sigma(A)$ *und* *ii) für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ die geometrische mit der algebraischen Vielfachheit von λ übereinstimmt.*

Beweis. Nach Voraussetzung i) und ii) ist u eine Linearkombination von Termen der Form

$$t^m e^{\lambda t} x \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda < 0 \text{ bzw. } e^{\lambda t} x \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda = 0.$$

Daher ist $|u(t)|$ für alle $t \geq 0$ beschränkt. Ist umgekehrt $|u(t)|$ für alle $t \geq 0$ beschränkt, so folgen die Aussagen i) und ii) wiederum aus dem Strukturtheorem 3.5.

□

Bei der qualitativen Beschreibung des Lösungsverhaltens von Differentialgleichungen werden häufig die folgenden Begriffe verwendet.

4.3 Definition. Betrachtet man das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \quad y(t_0) = y_0,$$

mit einer Funktion $f : I \times X \to X$, so heißt X der *Phasenraum*. Ist das obige Anfangswertproblem für $t_0 \in I$ eindeutig lösbar und ist u die Lösung, so heißt die Abbildung

$$\Phi : I \times X \to X, \quad (t, y_0) \mapsto \Phi(t, y_0) := u(t)$$

der *Fluss* der Differentialgleichung. Der zugehörige Wertebereich, d.h. die Menge

$$\{\Phi(t, y_0) : t \in I\}$$

heißt *Orbit* oder *Phasenkurve* oder *Trajektorie*. Ferner heißt $x \in X$ *Fixpunkt* des Flusses Φ, falls

$$\Phi(t, x) = x,$$

für alle $t \in I$ gilt.

4.4 Beispiel. (ungedämpftes lineares Pendel).
Betrachte die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) + u(t) = 0,$$

welche durch $y := (u, u')^T$ in das äquivalente System

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

überführt werden kann. Zu $y_0 \in \mathbb{R}^2$ ist die Lösung u des Anfangswertproblems mit $y(0) = y_0$ gegeben durch den Fluss

$$\Phi(t, y_0) = u(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} y_0.$$

Der zugehörige Orbit ist periodisch mit Periode 2π.

Das qualitiative Verhalten der Lösungen der Gleichung (4.1) lässt sich in der Situation von reellen 2×2-Matrizen A sehr gut beschreiben. Es wird im wesentlichen durch die Lage der beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 in der komplexen Ebene bestimmt. Sinnvollerweise betrachten wir anstelle der Gleichung (4.1) die neue Gleichung

$$y'(t) = By(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $B = S^{-1}AS$ und S wie im vorigen Abschnitt. Dann ist B von der Form

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

für die Eigenwerte λ_1, λ_2 bzw. λ von A. Dies führt in natürlicher Weise zur folgenden *Klassifizierung linearer Flüsse*. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem B eine Diagonalmatrix ist. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und wir unterscheiden die folgenden Fälle.

Lage der Eigenwerte in $\mathbb{C}$ Phasenbild

a)

$|z_1(t)| = c|z_2(t)|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ Knoten

b)

$|z_1(t)| = c|z_2(t)|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ Knoten

c)

$|z_1(t)| = c|z_2(t)|^{-|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}|}$ Sattelpunkt

d)

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha > 0$ Strudel

e)

Strudel

f)

$\lambda = \pm i\beta, \beta \neq 0$ Zentrum, Wirbel

g)

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

h)

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

i)

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

Ist A nicht diagonalähnlich, so lautet die allgemeine Lösung

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda t} + c_2\, te^{\lambda t} \\ c_2\, e^{\lambda t} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

und es gilt weiter:

Lage der Eigenwerte in $\mathbb{C}$ Phasenbild

j)

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

k)

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

l)

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$

Damit haben wir uns einen vollständigen Überblick über das Lösungsverhalten verschafft. Zusammenfassend beschreiben wir die Situation wie folgt. Es sei A eine 2×2 Matrix und für das charakteristische Polynom gelte

$$\begin{aligned} p_\lambda(A) = \det(\lambda - A) &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \lambda(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \lambda \text{spur } A + \det\ A. \end{aligned}$$

Ist $D := (\text{spur } A)^2 - 4 \det A$ die Diskriminante von A, so gilt der folgende Satz.

4.5 Satz. *Es sei A eine 2×2-Matrix.*

a) Es gelte $D \geq 0$.

i) Ist $\det A > 0$ *und* $\text{spur } A < 0$, *so ist das Phasenbild ein stabiler Knoten.*

ii) Ist $\det A < 0$ *und* $\text{spur } A > 0$, *so ist das Phasenbild ein instabiler Knoten.*

iii) Ist $\det A < 0$ *und* $\text{spur } A = 0$, *so ist das Phasenbild ein Sattelpunkt.*

b) Ist $D < 0$, so gelten die folgenden Aussagen:

i) Ist $\text{spur } A < 0$, *so ist das Phasenbild eine stabile Spirale.*

ii) Ist $\text{spur } A = 0$, *so ist das Phasenbild ein Wirbel oder Zentrum.*

iii) Ist spur $A > 0$ *so ist das Phasenbild eine instabile Spirale.*

Für $n = 3$ ist der Überblick über das Lösungsverhalten der Gleichung $y' = Ay$ nicht mehr so leicht herzustellen. Zur Illustration betrachte die Situation von $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha < 0$. Als Übung skizziere man das zugehörige Phasenbild.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch lineare Differentialgleichungen auf ihre Stabilität hin untersuchen. Hierzu führen diesen Begriff allgemein für Lösungen des Anfangswertproblemes

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) & = & f(t, y(t)), & t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) & = & y_0 & \end{array} \right. \tag{4.2}$$

ein.

4.6 Definition.
a) Eine Lösung u des Anfangswertproblems (4.2) heißt *stabil*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen u des Anfangswertproblems

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t, x(t)), \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

mit $|x_0 - y_0| < \delta$ gilt:

$$|x(t) - u(t)| < \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

b) Eine Lösung u von (4.2) heißt *instabil*, falls sie nicht stabil ist.
c) Eine Lösung u von (4.2) heißt *asymptotisch stabil*, falls sie stabil ist und falls für u wie oben zusätzlich

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - u(t)| = 0$$

gilt.
d) Eine Lösung u von (4.2) heißt *attraktiv*, falls

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - u(t)| = 0$$

gilt.

4.7 Bemerkung. *In der obigen Klassifikation linearer Flüsse ist ein Wirbelpunkt stabil, eine Senke asymptotisch stabil und eine Quelle instabil.*

Für die triviale Lösung $u \equiv 0$ der Gleichung $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt der folgende Satz. Die triviale Lösung $u \equiv 0$ heißt auch *Nulllösung* der Gleichung $y' = Ay$.

4.8 Satz. *Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann ist die Nulllösung der Gleichung $y' = Ay$ genau dann stabil, wenn gilt*

i) $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ *für alle* $\lambda \in \sigma(A)$ *und*

ii) für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ *mit* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *stimmt die geometrische mit der algebraischen Vielfachheit überein.*

Ferner ist die Nulllösung genau dann asymptotisch stabil, wenn $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *für alle* $\lambda \in \sigma(A)$ *gilt.*

Beweis. Gelten die Bedingungen i) und ii), so ist nach Satz 4.2 jede Lösung von $y' = Ay$ für alle $t \ge 0$ beschränkt. Also gilt

$$|e^{tA}x - 0| \le \|e^{tA}\||x| \le M|x| < \varepsilon, \quad t > 0,$$

falls $|x| < \frac{\varepsilon}{M} =: \delta$, d.h. die Stabilität der Nulllösung.
Ist umgekehrt die Nulllösung stabil, so folgt

$$|e^{tA}x| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \ge 0$$

nur, falls e^{tA} beschränkt ist für alle $t \ge 0$, d.h. falls i) und ii) gelten.
Der zweite Teil der Behauptung folgt direkt aus dem Stabilitätstheorem 4.1.

□

4.9 Beispiel. Wir betrachten eine gedämpfte Schwingung beschrieben durch die Gleichung

$$x''(t) + x(t) + \alpha x'(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit einem Dämpfungsfaktor $\alpha > 0$. Diese Gleichung ist äquivalent zum System

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} y(t).$$

Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$ sind gegeben durch $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$. Also ist die Nulllösung nach Satz 4.8 stabil. Ein anderer Beweis für denselben Sachverhalt beruht auf der folgenden Abschätzung. Setzt man $E(y(t)) := |y(t)|^2$, so erhält man

$$\frac{d}{dt}E(y(t)) = (\nabla E(y(t))^T \cdot y'(t) = 2y(t)^T y'(t) = -2\alpha y_2^2(t) \le 0 \quad \text{für alle } t \ge 0.$$

Daher ist die Nulllösung stabil, denn eine Abweichung der Startwerte von der Stelle 0 kann für $t \in \mathbb{R}$ nicht größer werden.

5 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem Abschnitt untersuchen wir Differentialgleichungen n-ter Ordnung, d.h. Gleichungen der Form

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in I, \tag{5.1}$$

wobei $g \in C(I \times D, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall bezeichnet. Eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung dieser Gleichung, falls
a) $u \in C^n(J, \mathbb{R})$ für ein Intervall $J \subset I$,
b) $\big(u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)\big) \in D$ für alle $t \in J$,
c) $u^{(n)}(t) = g(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t))$ für alle $t \in J$.
Differentialgleichungen der obigen Form lassen sich auf ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung, d.h. auf das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_3(t) \\ \vdots &= \vdots \\ y_{n-1}'(t) &= y_n(t) \\ y_n'(t) &= g(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{aligned}$$

transformieren. Wir wollen diese Beobachtung im folgenden Satz festhalten.

5.1 Satz. *Die Differentialgleichung* (5.1) *ist äquivalent zu dem System*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in I, \tag{5.2}$$

mit $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^n)$ *gegeben durch* $f(t,y) := (y_2, y_3, \ldots, y_n, g(t, y_1, \ldots, y_n))$.

Beweis. Ist u eine Lösung von (5.1), so ist

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (u, u', \ldots, u^{(n-1)})$$

eine Lösung von (5.2). Umgekehrt, ist y eine Lösung von (5.2), so ist $u := y_1$ eine Lösung von (5.1).

$\square$

Im Folgenden betrachten wir *lineare* Differentialgleichungen höherer Ordnung der Form

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)u(t) = b(t),$$

für stetige Funktionen $a_0, \ldots, a_{n-1}, b \in C(I, \mathbb{R})$. Wir notieren zunächst, dass diese Gleichung äquivalent ist zu dem System

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \quad t \in I,$$

wobei

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T = (u, u', \dots, u^{(n-1)})^T, \qquad B = (0, \dots, 0, b)^T$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gilt. Unsere bereits im Abschnitt 2 erzielten Ergebnisse über lineare Systeme erster Ordnung lassen sich daher wie folgt auf die jetztige Situation übertragen.

5.2 Satz. *Sind die Koeffizientenfunktionen $a_0, \dots, a_{n-1}$ und b stetig auf einem Intervall I, gilt $a_n \equiv 1$, und ist $t_0 \in I$, so besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)}(t) &= b(t), \qquad && t \in I, \\ u^{(l)}(t_0) &= u_l, && l = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

genau eine Lösung. Sie existiert in ganz I und hängt in jedem kompakten Teilintervall von I stetig von den Funktionen $a_0, \dots, a_{n-1}$ und b ab.

Im Folgenden betrachten wir den Fall *konstanter Koeffizienten*, d.h. wir betrachten den Differentialoperator

$$A(D)u := \sum_{j=1}^{n} a_j u^{(j)} \quad \text{mit} \quad a_j \in \mathbb{C} \text{ und } a_n = 1.$$

Das charakteristische Polynom der zugehörigen Marix

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix},$$

lässt sich leicht angeben. Entwickelt man die Determinante nach der letzten Zeile, so folgt

$$\det(A - \lambda) = (-1)^n [a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n].$$

Also ist λ genau dann ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit m_λ der Matrix A, wenn λ eine Nullstelle der Vielfachheit m_λ des Polynoms

$$A(\lambda) := \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j, \qquad \text{mit } a_n = 1$$

ist. Dieses Polynom heißt auch das *charakteristische Polynom des Differentialoperators* $A(D) := \sum_{j=0}^{n} a_j D^j$. Man erhält dieses Operatorpolynom durch formales Ersetzen der Ableitung durch λ.
Nach diesen Vorbereitungen ist es nun leicht, ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung $A(D)u = 0$ anzugeben.

5.3 Satz. *Es sei $A(D) = \sum_{j=1}^{n} a_j D^j$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \ldots, n$ und $a_n = 1$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ seien die paarweise verschiedenen Nullstellen von $A(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$ mit den Vielfachheiten m_{λ_l}. Dann bilden die Funktionen*

$$e^{\lambda_l t}, te^{\lambda_l t}, \ldots, t^{m_{\lambda_l}-1} e^{\lambda_l t}, \qquad 1 \le l \le k,$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $A(D)u = 0$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Theorem 3.5. □

Wir erläutern die obigen Ergebnisse anhand der folgenden Beispiele.

5.4 Beispiele.
a) Betrachte die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0, \tag{5.3}$$

mit $b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad (A - \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -\lambda - b \end{pmatrix},$$

Das zugehörige charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + b\lambda + c$$

besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Fall 1: Es gelte $b^2 - 4c > 0$ und $c > 0$. In diesem Fall sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 > \lambda_2$. Also lautet die allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ist $b > 0$, so ist $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, so klingen alle Lösungen exponentiell ab. Physikalisch gesprochen handelt es sich um eine Schwingungsgleichung mit *Dämpfung*.

In der Phasenebene haben wir einen stabilen Knoten.

Ist $b < 0$, so gilt $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ und man spricht von einer *Anregung*; in der Phasenebene haben wir es in disem Fall mit einem instabilen Knoten zu tun.

b) *Fall 2*: Es gelte $b^2 - 4c = 0$ und $b \neq 0$. In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit $\lambda = -\frac{b}{2} \neq 0$. Ist $b > 0$, so folgt $\lambda < 0$, also der Fall der Dämpfung und in der Phasenebene haben wir einen stabilen Knoten.

Ist hingegen $b < 0$, also $\lambda > 0$, so haben wir in der Phasenebene einen instabilen Knoten.

Fall 3: Es gelte $b^2 - 4c < 0$ und $b \neq 0$. Setzt man $\alpha := -\frac{b}{2}$ und $\omega := \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}$, so lautet die allgemeine Lösung

$$u(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Ist $b > 0$, also $\alpha < 0$, so handelt es sich um eine *gedämpfte Schwingung* und in der Phasenebene liegt eine stabile Spirale vor.

Ist hingegen $b < 0$, also $\alpha > 0$, so handelt es sich um eine *angefachte Schwingung* und in der Phasenebene haben wir eine instabile Spirale.

Fall 4: Es gelte $b = 0$ und $c > 0$. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall

$$u(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit $\omega^2 = c$. Alle Lösungen sind daher periodische Funktionen mit Periode ω und im Phasenraum haben wir ein Zentrum.

In diesem Fall ist die Gleichung (5.3) äquivalent zur Gleichung

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

der Gleichung des *harmonischen Oszillators*. Ferner spielt die Gleichung

$$u''(t) + 2\alpha u'(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

in der Mechanik als Gleichung des *gedämpften harmonischen Oszillators* eine wichtige Rolle.
Die Diskussion der weiteren Fälle, d.h. $c < 0$, $b \neq 0, c = 0$ und $b = 0, c = 0$ überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.