Skriptum zur Vorlesung

Analysis III: Differentialgleichungen

Wintersemester 2008/09

Matthias Hieber
Fachbereich Mathematik
TU Darmstadt

I Elementare Lösungsmethoden

In diesem Kapitel betrachten wir elementare Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Elementar bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die beschriebenen Methoden nur auf Differentiations- sowie Integrationstechniken beruhen, welche wir aus der Analysis I kennen. Insbesondere verwenden wir in diesem Kapitel keine Fixpunktargumente.
Das Kapitel beginnt und enthält im Wesentlichen die Methode der Trennung der Variablen. Diese klassische Methode zur Behandlung gewisser Typen von Differentialgleichungen benötigt neben dem Hauptsatz der Diffential- und Integralrechnung nur den Begriff der Umkehrfunktion und deren Ableitung.
Wir beginnen mit einem kurzen Abschnitt, in welchem Anfangswertprobleme und der Begriff einer Lösung einer Differentialgleichung eingeführt werden. Hieran anschließend folgt ein Abschnitt über die Methode der Trennung der Variablen, welche dann im letzten Abschnitt an Hand klassischer Beispiele weiter illustriert wird.

1 Begriffsbildung

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ immer eine offene Menge, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt. Für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ und eine stetige Funktion $f : I \times \Omega \to \Omega$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$(1.1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) & = & f(t,y), & t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0. & \end{array} \right.$$

In der folgenden Definition präzisieren wir den Begriff der Lösbarkeit des obigen Anfangswertproblems.

1.1 Definition. (Lösungsbegriff).
Eine Funktion $u : J \to \Omega$ heißt *Lösung* des obigen Anfangswertproblems, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $J \subset I$ ist ein nicht triviales Intervall (d.h. es besteht nicht nur aus einem Punkt) mit $t_0 \in J$,

b) $u \in C^1(J, \Omega)$,

c) $u'(t) = f(t, u(t))$ für alle $t \in J$,

d) $u(t_0) = y_0$.

Neben dem Begriff der Lösung interessieren wir uns weiter für sogenannte maximale und globale Lösungen von Anfangswertproblemen. Genauer gesaft sind diese wie folgt definitiert.

1.2 Definition. a) Erfüllt in der obigen Situation eine Funktion $u : J \to \Omega$ nur die Bedingungen a)-c), so nennt man u eine *Lösung der Differentialgleichung* $y' = f(t, y)$.

b) Ist $\tilde{u} : \tilde{J} \to \Omega$ eine weitere Lösung des obigen Anfangswertproblems, so heißt $\tilde{u}$ eine *Fortsetzung* von u, falls $J \subset \tilde{J}$ und $\tilde{u}|_J = u$ gilt. In diesem Fall schreibt man auch $u \subset \tilde{u}$.

c) Besitzt u keine echte Fortsetzung, so heißt u *maximale Lösung* und J das *maximale Existenzintervall* des obigen Anfangswertproblems.

d) Gilt $J = I$, so heißt u *globale Lösung* des obigen Anfangswertproblems.

2 Trennung der Variablen

In diesem Abschnitt betrachten wir die spezielle Situation, in der die reellwertige rechte Seite f der Differentalgleichung als Produkt zweier Funktionen g und h geschrieben werden kann, wobei g und h jeweils stetige reellwertige Funktionen einer Variablen sind, d.h. dass

$$f(t, y) = g(t)h(y), \quad t \in I, y \in \Omega,$$

für stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : I \to \mathbb{R}$ gilt. Wir betrachten dann das Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y' & = & g(t)h(y), & t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0. & \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Probleme dieser Art heißen auch *Differentialgleichungen erster Ordnung* mit *getrennten Variablen.*

Es sei $y : J \to \Omega$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1) derart, dass $h(y(t)) \neq 0$ für alle $t \in J$ gilt. Somit gilt $g(t) = \frac{y'(t)}{h(y(t))}$ und durch Integration sowie durch die Substitution $\xi = y(\tau)$ erhalten wir

$$\int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{h(y(\tau))} d\tau = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{h(\xi)} d\xi. \tag{2.2}$$

Setzt man $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau)d\tau$, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass G stetig differenzierbar ist.
Weiter sei U eine Umgebung von $y_0 \in \Omega$ mit $h(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in U$. Setzt man für $y \in U$

$$H(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{h(\xi)} d\xi,$$

so ist wiederum H stetig differenzierbar mit $H(y_0) = 0$ und $H' = \frac{1}{h}$. Dies bedeutet, dass H einen C^1-Diffeomorphismus von U auf ein Intervall $V \subset \mathbb{R}$ darstellt mit $H(y_0) = 0 \in V$. Damit gilt die Aussage (2.2) genau dann, wenn $H(y(t)) = G(t)$ bzw. wenn $y(t) = H^{-1}(G(t))$ für alle $t \in J$ gilt. In diesem Fall ist $y : J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $y(t_0) = y_0$. Differenzieren wir die Gleichung $H(y(t)) = G(t)$ nach der Kettenregel, so ergibt sich

$$H'(y(t))y'(t) = G'(t) \Leftrightarrow y'(t) = \frac{G'(t)}{H'(y(t))} = g(t)h(y(t)), \quad t \in J.$$

Dies bedeutet, dass $y := H^{-1} \circ G : J \to \Omega$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1) ist.
Weiter kann man zeigen, dass außer y keine weiteren Lösungen des obigen Problems existieren. Hierzu sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung von (2.1). Dann gilt für $g(\tilde{y}) \neq 0$ wie oben

$$g(t) = \frac{\tilde{y}'(t)}{h(\tilde{y}(t))}.$$

Integrieren wir diese Gleichung wie oben, so erhalten wir

$$\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t \frac{\tilde{y}'(\tau)}{h(\tilde{y}(\tau))} d\tau = \int_{y_0}^{\tilde{y}(t)} \frac{1}{h(\xi)} d\xi.$$

Dies impliziert aber, dass $G(t) = H(\tilde{y}(t))$ und also dass $\tilde{y}(t) = H^{-1}(G(t)) = y(t)$ für alle $t \in J$ gilt.

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen.

2.1 Satz. (Trennung der Variablen).
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Omega subset \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ bzw. $h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Gilt $h(y_0) \neq 0$, so existiert ein offenes Intervall $J \subset I$ um t_0, so dass das Anfangswertproblem (2.1) *auf J genau eine Lösung besitzt. Diese ist gegeben durch*

$$y = H^{-1} \circ G \textit{ mit } G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau)d\tau \textit{ und } H(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{h(\xi)} d\xi.$$

Wir erläutern die oben beschriebene Methode der Trennung der Variablen an Hand folgender Beispiele.

2.2 Beispiele.
a) Wir untersuchen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= 1 + y^2(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Setzt man $g(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $h(y) = 1 + y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$, so folgt aus Satz 2.1, dass dieses Problem in einer Umgebung von 0 genau eine Lösung y besitzt. Diese lässt sich aus der Gleichung

$$\int_0^y \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = \int_0^t d\tau$$

zu $\arctan y = t$, also zu

$$y(t) = \tan t$$

für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ bestimmen. Die Lösung ist daher maximal aber nicht global.
b) Wir betrachten weiter das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \cos t e^{y(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= \pi/2. \end{cases}$$

Setzt man $g(t) = \cos t$ und $h(y) = e^y$, so folgt wiederum aus Satz 2.1, dass dieses Problem in einer Umgebung von 0 eine eindeutige Lösung besitzt, welche durch

$$\int_{\pi/2}^y e^{-\xi} d\xi = \int_0^t \cos \tau d\tau$$

zu $-\sin t + e^{-\pi/2} = e^{-y}$, also zu

$$y(t) = -\log[-\sin t + e^{-\pi/2}]$$

bestimmt werden kann. Dieses Beispiel zeigt, wie auch das obige Beispiel a), dass die Lösung eines Anfangswertproblems nicht notwendig auf ganz $\mathbb{R}$, sondern eventuell nur in einem kleinen Intervall exisitiert, und zwar auch dann, wenn die rechte Seite der Gleichung auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert und „glatt“ ist. Man schaue sich daraufhin noch einmal die Formulierung und den Beweis des Satzes 2.1 an.

Gewisse Typen von Differentialgleichungen lassen sich durch Skalierungsargumente auf eine bekannte Situation zurückführen. Wir betrachten hier zum Beispiel sogenannte *homogene Differentialgleichungen.*

2.3 Beispiel. (Homogene Differentialgleichungen).
Für $\Omega = (0, \infty)$ und eine stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachten wir Differentialgleichungen von der Form

$$y'(t) = f(\frac{y}{t}), \quad t \in (0, \infty).$$

Führt man $u = y/t$ als neue Variable ein, so erhält man

$$u'(t) = -\frac{y(t)}{t^2} + \frac{y'(t)}{t} = -\frac{u}{t} + \frac{f(u)}{t} = \frac{f(u) - u}{t};$$

somit ist das Problem auf ein Problem zurückgeführt, welches sich mit der Methode der Trennung der Variablen lösen lässt.
Wir betrachten zum Beispiel das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{y(t)}{t} - \frac{t^2}{y^2(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ y(1) &= 1. \end{cases}$$

In diesem Fall ist $f(u) = u - \frac{1}{u^2}$ und das skalierte Problem lautet

$$\begin{cases} u'(t) &= -\frac{1}{tu^2(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ u(1) &= 1. \end{cases}$$

Die Lösung hiervon ist bestimmt durch

$$\int_1^u v^2 dv = -\int_1^t \frac{1}{\tau} d\tau, \text{ also durch } \frac{u^3 - 1}{3} = -\log t.$$

Dies bedeutet, dass y gegeben durch

$$y(t) = t\sqrt[3]{1 - 3\log t}$$

für $t \in (0, \sqrt[3]{e})$ die Lösung obigen Anfangswertproblems ist.

3 Lineare Differentialgleichungen und andere klassiche Beispiele

Wir beginnen mit einem Abschnitt über lineare Differentialgleichungen.

Lineare Differentialgleichungen

Die Technik der Trennung der Variablen lässt sich gewinnbringend auf sogenannte *lineare Differentialgleichungen* anwenden. Hierunter versteht man Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) + g(t)y(t) = h(t), t \in I,$$

wobei $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I sind. Wir betrachten zunächst den Fall $h = 0$. Satz 2.1 impliziert, dass dann jede Lösung der obigen Gleichung von der Form

$$y(t) = ce^{-G(t)} \quad \text{mit } G(t) = \int_{t_0}^t G(\tau)d\tau, \quad t_0 \in I$$

ist, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann. Die der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ gehorchende Lösung hat daher die Gestalt

$$y(t) = y_0 e^{-G(t)}, \quad t \in I.$$

Für den inhomogenen Fall $h \neq 0$ betrachten wir den Ansatz

$$y(t) = c(t)e^{-G(t)} \quad \text{mit } G(t) = \int_{t_0}^t G(\tau)d\tau, \quad t_0 \in I$$

mit einer Funktion $c : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$y' + gy = [c' - gc + gc]e^{-G} = c'e^{-G} = h$$

genau dann, wenn

$$c' = he^G \quad \text{also genau dann, wenn} \quad c(t) = \int_{t_0}^t h(t)e^{G(t)}dt + C_0, \quad t \in I$$

gilt. Wir erhalten also den folgenden Satz.

3.1 Satz. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sowie $t_0 \in I$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) + g(t)y(t) & = & h(t), & t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0, & \end{array} \right. \tag{3.1}$$

genau eine globale Lösung y, welche durch

$$y(t) = e^{-G(t)}y_0 + e^{-G(t)} \int_{t_0}^t h(t)e^{G(t)}dt, \quad t \in I.$$

gegeben ist.

Nach Konstruktion ist es klar, dass y, definiert wie oben, eine Lösung des Anfangswertproblems (3.1) ist. Den Beweis der Eindeutigkeit überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Die Bernoullische Differentialgleichung

Es sei $\alpha \neq 1$. Zu Ehren von Jakob BERNOULLI (1654-1705), einem der großen Mathematiker seiner Zeit, wird die Gleichung

$$y'(t) + g(t)y(t) + h(t)y^\alpha(t) = 0$$

als *Bernoullische Differentialgleichung* bezeichnet. Multipliziert man diese Gleichung mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, so erhalten wir zunächst

$$(y^{1-\alpha})'(t) + (1-\alpha)g(t)y^{1-\alpha}(t) + (1-\alpha)h(t) = 0.$$

Setzt man dann $u := y^{1-\alpha}$, so ergibt sich eine lineare Differentialgleichung der Form

$$u'(t) + (1-\alpha)g(t)u(t) + (1-\alpha)h(t) = 0.$$

Ist u eine Lösung dieser linearen Gleichung, so ist $y := u^{1/(1-\alpha)}$ eine Lösung der Bernoullischen Gleichung. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass wir eine Lösung der Bernoulischen Gleichung erhalten, wenn wir nur die obige lineare Gleichung zu lösen vermögen. Wegen der auftretenden Potenz y^α sind je nach α jedoch verschiedene Fälle ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in 2\mathbb{Z}$) zu unterscheiden.

Die Riccatische Differentialgleichung

Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $g, h, f : I \to \mathbb{R}$ lautet die *Riccatische Differentialgleichung*

$$y'(t) + g(t)y(t) + h(t)y^2(t) = f(t), \quad t \in I.$$

Gilt speziell $f \equiv 0$, so handelt es sich um eine Bernoullische Gleichung mit $\alpha = 2$ vor. Nach dem vorherigen Abschnitt erfüllt die Funktion $u = 1/y$ die lineare Gleichung

$$u'(t) - g(t)u = h(t), \quad t \in I.$$

Demnach werden für $f = 0$ alle Lösungen der Riccatischen Gleichung durch $y = 0$ und $y = 1/u$ beschrieben. Im Fall $f \not\equiv 0$ lassen sich Lösungen nur noch in bestimmten Sonderfällen explizit angeben.

Die logistische Gleichung

Die *logistische Gleichung* tritt häufig bei der Modellierung von Populationsmodellen auf. Sie ist von der Form

$$y'(t) = y(t)(b - cy(t)), \quad t \geq 0,$$

für gegebenen Konstanten $b, c > 0$. Mittels der Methode der Trennung der Variablen erhalten wir für jedes $\alpha \neq 0$ die Lösungen

$$y_\alpha(t) = \frac{b}{c}\frac{1}{1+\alpha e^{-bt}}, \quad t > 0.$$

Weitere Lösungen sind durch $y \equiv 0$ and $y \equiv \frac{b}{c}$ gegeben.
Betrachtet man anstelle von Konstanten $b, c > 0$ nun stetige Funktionen $b, c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, d.h. betrachtet man die *verallgemeinerte logistische Gleichung*

$$y'(t) = y(t)(b(t) - c(t)y(t)), \quad t \geq 0,$$

so sehen wir, dass diese Gleichung eine Bernoullische Gleichung darstellt. Setzt man $u = 1/y$, so erhält man mit gegebenem $y(0) = y_0 > 0$

$$u'(t) = -b(t)u(t) + c(t), \quad u(0) = 1/y_0 = u_0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$u(t) = e^{B(t)}u_0 + \int_0^t c(\tau)e^{B(\tau)}d\tau \quad \text{mit } B(t) = \int_0^t b(s)ds.$$