Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2011

Blatt 4

Übungen zur Vorlesung
Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

G8. Adjungierten-Methode für ein semilineares Randsteuerungsproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{y\in H^1(\Omega),\, u\in L^2(\partial\Omega)} \quad f(y,u) := \frac{1}{2}\|y-y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\begin{aligned} \text{u.d.N.} \qquad -\Delta y + y &= 0 \qquad \text{auf } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + y|y| &= u \qquad \text{auf } \partial\Omega, \\ a \le u &\le b \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $a, b \in L^2(\partial\Omega)$, $y_d \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$.

Hinweis: Die Einbettung $H^1(\Omega) \subset L^p(\partial\Omega)$ ist kompakt für $1 \le p < \infty$.

a) Geben Sie die schwache Formulierung der Zustandsgleichung an. Die zugehörige Operatorgleichung sei $E(y,u) = 0$ mit $E : Y \times U \to Z$. Geben Sie geeignete Y, U, Z an.
b) Beweisen Sie, dass das Problem eine optimale Lösung hat.
c) Leiten Sie die linearisierte Zustandsgleichung in schwacher und starker Form her. Sie können verwenden, dass $E : Y \times U \to Z$ stetig F-differenzierbar ist.
d) Begründen Sie die stetige F-Differenzierbarkeit des reduzierten Zielfunktionals $\hat{f}(u) = f(y(u), u)$.
e) Leiten Sie die adjungierte Gleichung in schwacher und starker Form her.
f) Geben Sie die Adjungierten-basierte Darstellung der Ableitung der reduzierten Zielfunktion an.
g) Geben Sie notwendige Optimalitätsbedingungen für eine lokale Lösung $(\bar{y}, \bar{u})$ an.

G9. Zweite Ableitungen

$E : Y \times U \to Z$ und $f : Y \times U \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig F-differenzierbar, $E(y(u), u) = 0$ definiere eine eindeutige Abbildung $u \in U \mapsto y(u) \in Y$ und $E'_y(y(u), u)$ sei invertierbar.

Betrachte die Lagrange-Funktion $L(y, u, p) = f(y, u) + \langle p, E(y, u)\rangle_{Z^*,Z}$ und die reduzierte Zielfunktion $\hat{f}(u) := f(y(u), u)$.

Unser Ziel ist die Berechnung von $\hat{f}''(u)s$ für gegebenes $s \in U$.

a) Zeigen Sie, dass für $s_1, s_2 \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}''(u)s_2, s_1\rangle_{U^*,U} = {} & \langle L'_y(y(u), u, p), y''(u)(s_1, s_2)\rangle_{Y^*,Y} \\ & + \langle L''_{yy}(y(u), u, p)y'(u)s_2, y'(u)s_1\rangle_{Y^*,Y} \\ & + \langle L''_{yu}(y(u), u, p)s_2, y'(u)s_1\rangle_{Y^*,Y} \\ & + \langle L''_{uy}(y(u), u, p)y'(u)s_2, s_1\rangle_{U^*,U} \\ & + \langle L'_{uu}(y(u), u, p)s_2, s_1\rangle_{U^*,U}. \end{aligned}$$

Tip: Differenzieren Sie $\hat{f}'(u)s_1$ bezüglich u in Richtung s_2.

b) Folgere, dass mit der Lösung $p = p(u)$ der adjungierten Gleichung $L'_y(y(u), u, p) = 0$ gilt

$$\hat{f}''(u) = T(u)^* L''_{ww}(y(u), u, p(u)) T(u)$$

mit

$$T(u) = \begin{pmatrix} y'(u) \\ I_U \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U, Y \times U), \quad L''_{ww} = \begin{pmatrix} L''_{yy} & L''_{yu} \\ L''_{uy} & L''_{uu} \end{pmatrix},$$

wobei $I_U \in \mathcal{L}(U, U)$ die Identität bezeichnet.

c) Zeigen Sie, dass $\hat{f}''(u)s$ wie folgt berechnet werden kann:

Seien $y(u)$ und $p(u)$ Lösung der Zustandsgleichung bzw. der adjungierten Gleichung.

1. Berechne die Sensitivität $\delta_s y = y'(u)s$ als Lösung von

$$E'_y(y(u), u)\delta_s y = -E'_u(y(u), u)s.$$

2. Berechne

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L''_{yy}(y(u), u, p(u))\delta_s y + L''_{yu}(y(u), u, p(u))s \\ L''_{uy}(y(u), u, p(u))\delta_s y + L''_{uu}(y(u), u, p(u))s \end{pmatrix}.$$

3. Berechne

$$h_3 = y'(u)^* h_1 = -E'_u(y(u), u)^* E'_y(y(u), u)^{-*} h_1.$$

Dies erfordert die Lösung der weiteren adjungierten Gleichung $E'_y(y(u), u)^* h = h_1$.

4. Setze $\hat{f}''(u)s = h_2 + h_3$.

H4. Existenz und Ableitungsberechnung

Sei ähnlich wie in **H3** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{y \in H^1(\Omega),\, u \in L^2(\Omega)} \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y - y_r\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{u.d.N.} \quad -\Delta y + y + y^3 = u \quad \text{auf } \Omega,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$a \le u \le b \quad \text{auf } \Omega$$

mit $a, b \in L^2(\Omega)$, $a < b$, $y_d \in L^2(\Omega)$, $y_r \in L^2(\partial\Omega)$ und $\alpha > 0$. Setze $Y = H^1(\Omega)$, $U = L^2(\Omega)$.

Die partielle Differentialgleichung ist in schwacher Form zu verstehen.

a) Leiten Sie die adjungierte Gleichung in schwacher und starker Form her.

b) Geben Sie die Adjungierten-basierte Darstellung der Ableitung der reduzierten Zielfunktion $\hat{f}(u) := f(y(u), u)$ an.

c) Geben Sie eine notwendige Optimalitätsbedingung 1. Ordnung an.

d) Geben Sie im Detail an, wie man $\hat{f}''(u)s$ für eine Richtung $s \in U$ berechnen kann.

Abgabetermin für Hausaufgaben: Nächste Übung.