

## Übungen zur Vorlesung Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

### G6. Differenzierbarkeit

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig Fréchet-differenzierbar sind. Leiten Sie hierzu zunächst formal ab und weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um die Fréchet-Ableitung handelt:

a)  $F : y \in L^2(\Omega) \mapsto \|y - y_d\|_{L^2}^2 \in \mathbb{R}, y_d \in L^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

b)  $G : y \in L^6(\Omega) \mapsto y^3 \in L^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt.

**Hinweis:** Aus der Hölder-Ungleichung folgt für alle  $1 \leq s \leq \infty, 1 \leq p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|uv\|_{L^s} \leq \|u\|_{L^{ps}} \|v\|_{L^{qs}}, \quad \forall u \in L^{ps}, v \in L^{qs}.$$

### G7. Reduzierte Zielfunktion für ein linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2$  oder  $n = 3$ , ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{y \in H^1(\Omega), u \in L^2(\partial\Omega)} \quad & \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -\Delta y + y = g \quad \text{auf } \Omega, \\ & \frac{\partial y}{\partial \nu} = u \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit  $g \in L^2(\Omega), y_d \in L^2(\Omega)$  und  $\alpha > 0$ . Setze  $Y = H^1(\Omega), U = L^2(\partial\Omega)$ .

- a) Geben Sie die schwache Formulierung der Zustandsgleichung an und schreiben Sie das Problem abstrakt in der Form

$$\min_{y \in Y, u \in U} f(y, u) \quad \text{u.d.N.} \quad E(y, u) = 0, \quad u \in U_{ad}$$

mit  $E : Y \times U \rightarrow Y^*$ .

- b) Begründen Sie, dass zu jedem  $u \in U$  ein eindeutiges  $y = y(u) \in Y$  existiert mit  $E(y(u), u) = 0$ .
- c) Zeigen Sie, dass  $E : Y \times U \rightarrow Y^*$  und  $f : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig Fréchet-differenzierbar sind. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von  $f$  und  $E$  und begründen Sie, dass der Operator  $E'_y(y, u)$  beschränkt invertierbar ist.  
Tip: Benutzen Sie **G6**.
- d) Warum ist die Abbildung  $u \in U \mapsto y(u) \in Y$  stetig Fréchet-differenzierbar? Wie lautet die Ableitung  $y'(u)$ ? Begründen Sie, dass das reduzierte Zielfunktional  $\hat{f} : u \in U \mapsto f(y(u), u)$  stetig Fréchet-differenzierbar ist.
- e) Wie kann man  $y'(u)h$  durch Lösen einer PDE berechnen? Wie erhält man nun die Richtungsableitung  $d\hat{f}(u, h) = \hat{f}'(u)h$ ?
- f) Sei  $(\bar{y}, \bar{u})$  eine Lösung des Optimierungsproblems. Was gilt dann für  $d\hat{f}(\bar{u}, h), h \in L^2$ ? Welche Optimalitätsbedingung ergibt sich?

**Bitte wenden!**

### H3. Ein semilinear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{y \in H^1(\Omega), u \in L^2(\Omega)} \quad & \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -\Delta y + y + y^3 = u \quad \text{auf } \Omega, \\ & \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ & a \leq u \leq b \quad \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

mit  $a, b \in L^2(\Omega)$ ,  $a < b$ ,  $y_d \in L^2(\Omega)$  und  $\alpha > 0$ . Setze  $Y = H^1(\Omega)$ ,  $U = L^2(\Omega)$ .

- a) Geben Sie die schwache Formulierung der Zustandsgleichung an und schreiben Sie das Problem abstrakt in der Form

$$\min_{y \in Y, u \in U} f(y, u) \quad \text{u.d.N.} \quad E(y, u) = 0, \quad u \in U_{ad}$$

mit  $E : Y \times U \rightarrow Y^*$ .

- b) Begründen Sie, dass zu jedem  $u \in U$  ein eindeutiges  $y = y(u) \in Y$  existiert mit  $E(y(u), u) = 0$ .
- c) Zeigen Sie, dass  $E : Y \times U \rightarrow Y^*$  stetig Fréchet-differenzierbar ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von  $E$  und begründen Sie, dass der Operator  $E'_y(y, u)$  stetig invertierbar ist.  
Tip: Benutzen, Sie **G6**.
- d) Folgern Sie mit einem bekannten Satz aus der Analysis, dass die Abbildung  $u \in U \mapsto y(u) \in Y$  stetig Fréchet-differenzierbar ist. Wie lautet die Ableitung  $y'(u)$ ?
- e) Begründen Sie, dass das reduzierte Zielfunktional  $\hat{f} : u \in U \mapsto f(y(u), u)$  stetig Fréchet-differenzierbar ist.
- f) Wie kann man  $y'(u)h$  durch Lösen einer PDE berechnen? Geben Sie die Schritte zur Berechnung der Richtungsableitung  $d\hat{f}(u, h) = \hat{f}'(u)h$  an.
- g) Begründen Sie, dass das Optimierungsproblem eine Lösung hat.

**Abgabetermin für Hausaufgaben:** Nächste Übung.