

Übungen zur Vorlesung Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

Bearbeiten Sie **G3.** von Blatt 1.

G4. Sobolev-Ungleichung

Sei $p \in [1, \infty[$. Zeigen Sie:

- a) Für alle $u \in C^\infty(]0, 1[)$ gilt $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \leq 2 \cdot \|u\|_{W^{1,p}}$.
- b) Für alle $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$ gilt $\|u\|_{L^\infty} \leq 2 \cdot \|u\|_{W^{1,p}}$.

Wir haben also die stetige Einbettung $W^{1,p}(]0, 1[) \subset L^\infty(]0, 1[)$.

Sie dürfen folgende Tatsache verwenden: Gilt $u_k \rightarrow u$ in L^p , dann existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow u$ fast überall.

Tip: Benutzen Sie ein Dichtheitsargument.

G5. Poissongleichung als Minimierungsproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $f \in L^2(\Omega)$.

Der Raum $V := H_0^1(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_V := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx$$

ist ein Hilbertraum, denn die induzierte Norm $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{H^1}$ und die Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ sind wegen der Poincaré-Ungleichung äquivalent.

Wir betrachten auf V das Energie-Funktional

$$J(w) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla w(x) \cdot \nabla w(x) - f(x)w(x) \right) dx = \frac{1}{2}(w, w)_V - (f, w)_{L^2}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die schwache Formulierung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{D}$$

für die Poisson-Gleichung lautet:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{DS}$$

$$\text{Kurz: } (u, v)_V = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Zeigen Sie:

- a) Für jedes $u \in V$ und $v \in V$ ist die Abbildung $t \in \mathbb{R} \mapsto J(u+tv)$ stetig differenzierbar. Wie lautet die Ableitung in $t = 0$?
- b) Für $u \in V$ sind äquivalent:
- i) $J(u) = \min_{w \in V} J(w)$
 - ii) $(u, v)_V = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in V$

Also ist die eindeutige schwache Lösung u von (D) zudem das eindeutige Minimum von J .

Bitte wenden!

H2. Kompakte Einbettung in Hölderräume und Existenz von Optimallösungen

Für jedes $\beta \in]0, 1]$ ist der Hölder-Raum

$$C^{0,\beta}([0, 1]) = \{u \in C([0, 1]) : \|u\|_{C^{0,\beta}} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{C^{0,\beta}} = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta}$$

ist ein Banachraum. Sei $p \in]1, \infty[$.

- Zeigen Sie durch Verfeinerung von **G4.**, dass die stetige Einbettung gilt $W^{1,p}(]0, 1[) \subset C^{0,1-1/p}([0, 1])$.
- Zeigen Sie, dass für jedes $\beta \in]0, 1]$ die Einbettung $C^{0,\beta}([0, 1]) \subset\subset C([0, 1])$ kompakt ist, also gilt:
Jede beschränkte Folge (u_k) in $C^{0,\beta}([0, 1])$ besitzt eine konvergente Teilfolge in $C([0, 1])$.
Tip: Zeigen Sie die Existenz einer Teilfolge $(u_k)_{k \in K}$, so dass $(u_k(x))_{k \in K}$ in allen rationalen Punkten $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ konvergiert (dies sind abzählbar viele Punkte!). Weisen Sie nun nach, dass $(u_k)_{k \in K}$ eine Cauchy-Folge in $C([0, 1])$ ist.
- Warum gilt also die kompakte Einbettung $W^{1,p}(]0, 1[) \subset\subset C([0, 1])$ für $p > 1$?
- Folgern Sie, dass das Problem

$$\max_{y \in H^1(]0,1[)} \|y\|_{L^\infty} \quad \text{s.t.} \quad \|y\|_{H^1} \leq 2$$

eine Lösung hat.

Hinweis: Sie dürfen benutzen: Gilt $\|y_k\|_{H^1} \leq 2$ und $y_k \rightarrow y$ in L^2 , dann gilt auch $y \in H^1$ und $\|y\|_{H^1} \leq 2$.

Abgabetermin für Hausaufgaben: Nächste Übung.