Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2011
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung
Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

G1. Berechnung des Gradienten der reduzierten Zielfunktion

Wir betrachten das endlichdimensionale Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{y\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^q} f(y,u) \quad \text{u.d.N.} \quad E(y,u)=0$$

mit C^1-Funktionen $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}$, $E:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^n$. Es sei bekannt, dass die Gleichung $E(y,u)=0$ für jedes $u\in\mathbb{R}^q$ genau eine zugehörige Lösung $y(u)\in\mathbb{R}^n$ besitzt. Das Problem ist dann offensichtlich äquivalent zu dem *reduzierten Problem*

$$\min_{u\in\mathbb{R}^q} \hat{f}(u) \quad \text{mit} \quad \hat{f}(u):=f(y(u),u).$$

Ferner sei $E_y'(y(u),u)$ für jedes $u\in\mathbb{R}^q$ invertierbar.

a) Differenzieren Sie die Gleichung $E(y(u),u)=0$ (total) nach u und berechnen Sie daraus die Ableitung $y'(u)$ der Abbildung $u\mapsto y(u)$.

b) Leiten Sie, ähnlich wie in a), zu gegebenem $v\in\mathbb{R}^q$ ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Richtungsableitung (Sensitivität) $d_v y(u) := y'(u)v$ her. Nutzen Sie $d_v y(u)$, um die Richtungsableitung $\hat{f}'(u)v$ zu bestimmen.

c) Zeigen Sie

$$\begin{aligned}\nabla\hat{f}(u) = \hat{f}'(u)^T &= y'(u)^T\nabla_y f(y(u),u) + \nabla_u f(y(u),u)\\ &= E_u'(y(u),u)^T p + \nabla_u f(y(u),u),\end{aligned}$$

wobei der *adjungierte Zustand* $p=p(u)\in\mathbb{R}^n$ die *adjungierte Gleichung* löst

$$E_y'(y(u),u)^T p = -\nabla_y f(y(u),u).$$

d) Vergleichen Sie den Aufwand der Berechnung von $\nabla\hat{f}(u)$ bei Verwendung der *Sensitivitätsmethode* aus b) und der *Adjungiertenmethode* aus c).

G2. Funktionalanalytische Grundlagen

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Vektorraum stetiger Funktionen

$$C(\bar{\Omega}) := \{v:\bar{\Omega}\to\mathbb{R};\ \ v \text{ stetig}\}.$$

Definiere für $u,v\in C(\bar{\Omega})$

$$\|u\|_{L^\infty} := \sup_{x\in\bar{\Omega}}|u(x)|, \quad (u,v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\|_{L^2} := \sqrt{(u,u)_{L^2}}.$$

a) Sei X der Banachraum $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{L^\infty})$. Entscheiden Sie, welche der folgenden linearen Funktionale in X^* liegen und schätzen Sie gegebenenfalls deren X^*-Norm ab:

- $u_1^*: u\in X\mapsto u(y)$ mit festem $y\in\Omega$,

Bitte wenden!

- $u_2^* : u \in X \mapsto \int_\Omega v(x)u(x)\,dx$ mit festem $v \in C(\bar\Omega)$,
- $u_3^* : u \in X \mapsto \int_{\Omega\setminus\{y\}} \frac{u(x)}{\|x-y\|_2}\,dx$ mit festem $y \in \Omega$.

b) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit $\|u\|_{L^2} \le C\|u\|_{L^\infty}$ für alle $u \in C(\bar\Omega)$.

c) Sei H der Prä-Hilbertraum aller Funktionen aus $C(\bar\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{L^2}$. Zeigen Sie, dass H kein Hilbertraum ist. Welche der Funktionale aus a) sind beschränkt auf H?

G3. Existenz von Minima

Haben die folgenden Optimierungsprobleme Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\min\limits_{u\in C([0,1])} \int_0^1 u(x)^2\,dx \;\text{ s.t. }\; u(1) = 1.$

b) $\min\limits_{u\in L^2((0,1))} -\int_0^1 xu(x)^2\,dx \;\text{ s.t. }\; \|u\|_{L^2} \le 1.$
Hierbei sei $L^2((0,1))$ der übliche Lebesgue-Raum, also die Vervollständigung des Prä-Hilbertraums $(C([0,1]),(\cdot,\cdot)_{L^2})$.

H1. Rund um Differentialoperatoren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei H der Prä-Hilbertraum aller Funktionen aus $C(\bar\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Weiter sei V der Prä-Hilbertraum aller Funktionen aus $C^1(\bar\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^1} := \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)^T\nabla v(x))\,dx.$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$u \in V \mapsto u_{x_i} \in H, \quad 1 \le i \le n,$$

linear und stetig ist.

b) Finden Sie Funktionen $u_k \in C^2(\bar\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\|u_k\|_{H^1} \le 1, \quad \|\Delta u_k\|_{L^2} \ge k.$$

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(u,v) \in V^2 \mapsto \int_\Omega \nabla u(x)^T\nabla v(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

bilinear und stetig ist.

d) Rufen Sie sich den Gaußschen Integralsatz in Erinnerung und zeigen Sie: Hat Ω hinreichend glatten Rand, so gilt für alle $u \in C^2(\bar\Omega)$, $v \in C^1(\bar\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\int_\Omega -\Delta u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)^T\nabla v(x)\,dx.$$

e) Zeigen Sie, nochmals mit dem Gaußschen Integralsatz: Ist $y \in C^2(\bar\Omega)$ Lösung von

$$-\Delta y = g \quad \text{auf } \Omega, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu} = h \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

mit Funktionen $g \in L^2(\Omega)$ und $h \in L^2(\partial\Omega)$, dann gilt:

$$\int_\Omega \nabla y(x)^T\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega g(x)v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} h(x)v(x)\,dS(x) \quad \forall\, v \in C^1(\bar\Omega).$$

Abgabetermin für Hausaufgaben: Nächste Übung.