Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
28.06.11

Minitest Lösung

a) Sei $S = (c, f, P)$ und $F = \forall x \forall y f x P c y$ eine geschlossene Formel in Skolem-Normalform; f sei dabei ein zweistelliges Funktions- und P ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie die Menge $T_0(S)$ aller variablenfreien Terme über S zur Formel F an.

- ☐ $M_1 := \emptyset$
- ☐ $M_2 := \{c, x, y, fxPcy\}$
- ☐ $M_3 := \{c, Pcc, PPccc, PcPcc, \dots\}$
- ⊠ $M_4 := \{c, fcc, ffccc, fcfcc, \dots\}$

Begründung: c ist eine Konstante, f ein Funktionssysmbol gemäß Vereinbarung des Skripts und der Vorlesung. $T_0(S) \neq M_1$, da $c \in T_0(S)$. $T_0(S) \neq M_2$, da $T_0(S)$ u.a. variablenfrei ist. $T_0(S) \neq M_3$, da P eine Relation ist. $T_0(S) = M_4$ nach Definition 1.3 im FO-Skript.

b) In der FO mit Gleichheit gibt es Formeln, die nur in Strukturen, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten, erfüllbar sind. ⊠ Richtig ☐ Falsch

Begründung: Die Formel $\forall x \forall y \forall z \, ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$ ist nur in Strukturen erfüllbar, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten. Anmerkung: Die Formel $\exists x \exists y \neg(x = y)$ ist dagegen nur in Strukturen erfüllbar, deren Grundmengen mindestens zwei Elemente enthalten.

c) Jede PNF-Formel (pränexe Normalform) ist auch in SKNF (Skolem-Normalform). ☐ Ja ⊠ Nein

Begründung: Gegenbeispiel: $\exists x P x$ ist nicht in SKNF, da sie nicht ausschliesslich All-Quantoren enthält.

d) Jede SKNF-Formel ist auch in PNF. ⊠ Ja ☐ Nein

Begründung: Nach Definition ist jede SKNF-Formel eine PNF-Formel ohne Existenz-Quantoren.

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln, wobei c ein Konstantensymbol, P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationsymbol ist:

(1) $\forall x (Pc \wedge \exists y (Px \leftrightarrow \neg Py))$

(2) $\forall x (Px \vee \exists x \neg Px)$

(3) $(\forall x \exists y (Rxy \rightarrow \forall x \exists y Ryx))$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(b) Geben Sie für die Formel aus (1) ein Herbrand-Modell an.

(c) Gegeben die Signatur $S = (1, +)$. Geben Sie die Trägermenge $\mathcal{T}_0(S)$ der Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ zu S an. Geben Sie auch, sofern existent, eine erfüllbare Formel *mit Gleichheit* an, für die $\mathcal{H}$ *kein* Modell ist.

Aufgabe G2

$\preceq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \land x_3 \preceq x_2) \land \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \land x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big).$$

Sei $\mathcal{A} = (A, \preceq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2\}$ und $\preceq^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}$.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:
   i. Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.
   ii. Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.
   iii. Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \land x_3 \preceq x_2) \land \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \land x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)

Betrachten Sie folgende Formelmenge, wobei P ein einstelliges Relations-, sowie L und R zweistellige Relationssymbole seien:

(1) $\forall x \exists y Rxy$

(2) $\forall x \exists y Lxy$

(3) $\exists x Px$

(4) $\forall x \forall y (Lxy \to Rxy)$

(5) $\forall x \forall y ((Px \land Rxy) \to Py)$

(a) Geben Sie die Skolem-Normalform der Sätze (1)–(5) an.

(b) Zeigen Sie dass die Sätze (1)–(5) erfüllbar sind, indem sie ein Herbrandmodell angeben.

(c) Zeigen Sie, dass die Formelmenge unerfüllbar wird, wenn (3) durch die Formel

$$(3') \quad \exists x(Px \wedge \forall y(Lxy \to \neg Py))$$

ersetzt wird. Argumentieren Sie dass es kein Herbrandmodell für die neue Formelmenge geben kann.

Hinweis: Durch das Ersetzen von (3) durch (3') ändert sich die Trägermenge des Herbrandmodells *nicht* (wenn wir dieselbe Skolemkonstante „c“ verwenden).

Aufgabe H2

Betrachten Sie die folgenden universellen, gleichheitsfreien Sätze für 1-stellige Funktionssymbole h und v:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x, y, z\,(x \sim x \wedge (x \sim y \to y \sim x) \wedge (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)) \\ (2) & \forall x\,(h(v(x)) \sim v(h(x))) \\ (3) & \forall x, y\,(x \sim y \to (h(x) \sim h(y) \wedge v(x) \sim v(y)) \end{array}$$

Bemerkung: Man kann sich vorstellen, dass h und v als Skolemfunktionen für

$$\forall x\,(\exists y\, Hxy \wedge \exists y\, Vxy)$$

eingeführt wurden, und dass $\sim$ als Kongruenzrelation anstelle von $=$ fungiert um mit (2) auszudrücken, dass h und v kommutieren. Was bedeutet das für H und V?

(a) Sei $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, h^{\mathcal{H}}, v^{\mathcal{H}}, \sim^{\mathcal{H}})$ eine Herbrand-Struktur. Beschreiben Sie die Trägermenge $\mathcal{T}$.

(b) Man kann die Teilmenge $\sim^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ so wählen, dass die Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ ein Modell von (1–3) wird. Geben Sie die minimale und die maximale Lösung an. Gibt es auch noch andere Möglichkeiten?