Formale Grundlagen der Informatik II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
22.06.11

Minitest Lösung

a) Sei $P(x)$ ein beliebiges einstelliges Prädikat. Welche der folgende Formeln in der Signatur (P) ist eine syntaktisch korrekte FO-Formel?

- ☒ $\forall x \, \forall y \, P(x) \wedge P(y)$
- ☒ $\forall x \, \exists x P(x)$
- ☐ $P(x) \, \forall x$
- ☐ $\forall P \, \forall x \, \forall y \, (P(x) \leftrightarrow P(y))$

Begründung: Der dritte Satz ist syntaktisch nicht korrekt, weil der Quantor an der falschen Stelle steht. Der vierte Satz ist falsch, weil $\forall P$, also quantifizieren über Prädikate, in FO nicht möglich ist.

b) Welche der folgenden Sätze in der Signatur (P) ist allgemeingültig.

- ☒ $\forall x \, \exists y \; x = y$
- ☐ $\exists x \, \forall y \; x = y$
- ☒ $\forall x \, P(x) \vee \exists y \, \neg P(y)$.

Begründung: Der erste Satz ist allgemeingültig, weil y nach x gewählt wird und man damit $y := x$ setzen kann. Der zweite Satz ist nicht allgemeingültig, weil er z.B. der folgenden Struktur ({a,b}) nicht erfüllt wird (warum?). Der dritte ist allgemeingültig, weil er äquivalent zu $\forall x \, P(x) \vee \neg \forall y \, P(y)$. Er ist damit eine Instanz des tertium non datur, also von $\varphi \vee \neg\varphi$.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Modellierung)
Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, S, R\}.$$

0	Konstante für Starttag
N	1-stelliges Funktionssymbol für „nächster Tag“
$<$	2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
S, R	1-stellige Relationssymbole für <u>S</u>onne und <u>R</u>egen

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in $\mathrm{FO}(S)$:

1) Auf Regen folgt Sonnenschein.
2) Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.

3) Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb drei Tagen wieder Regen.
4) Regen dauert nie länger als drei Tage.
5) Innerhalb einer Periode von vier Tagen regnet es an mindestens zwei Tagen.

Aufgabe G2
Betrachten Sie die Signatur $(<)$ und eine Struktur $\mathcal{A} = (A, <)$ in dieser Struktur.

(i) Beschreiben Sie einen Algorithmus der bei der Eingabe einer Folge von Elementen $a_1, a_2, \dots a_n$ aus A entscheidet, ob die a_i paarweise verschieden sind. Wieviele Vergleiche mit $=$ oder $<$ benötigt Ihr Algorithmus.

(ii) Betrachten Sie nun die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$. Geben Sie einen Algorithmus an, der für $\mathcal{N}$ schneller als für allgemeine Strukturen $\mathcal{A}$ entscheidet, ob eine Folge von Elementen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden ist?

Welche Eigenschaften von $\mathcal{N}$ haben Sie benutzt und können Sie einen Satz φ angeben, dass der Algorithmus für alle Strukturen $\mathcal{A} \models \varphi$ funktioniert?

Hinweis: Erinnern Sie sich an Heapsort oder Mergesort und nutzen Sie die Eigenschaft, dass jeder diesee Algorithmen eine List in $\mathrm{O}(n \log(n))$ Zeit und damit insbesondere mit $\mathrm{O}(n\, log(n))$ Vergleichen sortiert.

Aufgabe G3
Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $w = a_1 \dots a_n$ eine *Wortstruktur*

$$\mathcal{W}(w) = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$$

wobei

$$P_a := \{i \leq n \mid a_i = a\} \quad \text{und} \quad P_b := \{i \leq n \mid a_i = b\}\,.$$

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(<, P_a, P_b)$ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ \mid \mathcal{W}(w) \models \varphi\}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?
   i. $\forall x \forall y[x < y \rightarrow ((P_a x \rightarrow P_a y) \wedge (P_b y \rightarrow P_b x))]$
   ii. $\forall x \forall y[(x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y \wedge P_b z)]$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.
   i. $L((a+b)^* bb(a+b)^*)$
   ii. $L((ab)^+)$

(c) **Zusatzaufgabe:** Wir definieren die Menge der $*$-*freien regulären Ausdrücke* induktiv durch
   - $\emptyset$ und jedes Element von Σ sind $*$-freie reguläre Ausdrücke;
   - sind α und β $*$-freie reguläre Ausdrücke, so auch $\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ und $\sim\alpha$.

   Die Semantik eines solchen Ausdrucks ist wie für reguläre Ausdrücke definiert, wobei die Operation $\sim$ für die Komplementierung steht: $L(\sim\alpha) := \Sigma^* \setminus L(\alpha)$. Konstruieren Sie (induktiv) zu einem gegebenen $*$-freien regulären Ausdruck α eine Formel $\varphi_\alpha(x, y)$, so daß

$$\mathcal{W}(a_1 \dots a_n) \models \varphi_\alpha[i, k] \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq i \leq k \leq n \text{ und } w_{ij} \in L(\alpha)\,.$$

   Bemerkung: Man kann zeigen, dass die $*$-freien regulären Ausdrücke genau die Sprachen beschreiben, die man mit Prädikatenlogik definieren kann. Weiterhin gibt es reguläre Ausdrücke, die Sprachen beschreiben, die von keinem $*$-freien regulären Ausdruck beschrieben werden. Reguläre Ausdrücke können also mehr Sprachen beschreiben als Logik erster Stufe. Allerdings gibt es eine Erweiterung der Logik erster Stufe, die sogenannte *monadische Logik zweiter Stufe*, mit der man genau die Sprachen definieren kann, die auch von regulären Ausdrücken beschrieben werden.

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Geben Sie eine FO-Formel an, die besagt, dass die Trägermenge genau n Elemente enthält.

(b) Geben Sie eine FO-Formel an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.
Hinweis: Betrachten Sie die Signatur $(<)$.

(c) Begründen Sie, warum die folgende Formel wahr ist.

$$\varphi = \exists x\,(\,Px \rightarrow \forall y P(y)\,).$$

Aufgabe H2 (Monoide) (7 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $(*, e)$, wobei $*$ eine 2-stellige Funktion und e eine Konstante ist.

(a) Ein Struktur $\mathcal{A}$ für diese Signatur heißt Monoid, wenn $*$ assoziative ist und e ein neutrales Element für $*$, siehe Skript FGdI1 1.1.19.

Geben Sie einen Satz φ an, so dass $\mathcal{A}$ ein Monoid ist genau dann wenn $\mathcal{A} \models \varphi$.

(b) Wenn es zu jedem Element von $\mathcal{A}$ ein Inverses gibt, dann kann $\mathcal{A}$ zu einer Gruppe erweitert werden. Geben Sie einen Satz φ an, so dass $\mathcal{A} \models \varphi$ genau dann wenn $\mathcal{A}$ zu einer Gruppe erweitert werden kann.

(c) Betrachten Sie die folgenden Monoide:

1) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, +, 0)$
2) $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}, +, 0)$
3) $\mathcal{A}_3 = (\mathbb{N}, \max, 0)$, wobei $\max(x, y)$ das Maximum von x und y bezeichnet.
4) $\mathcal{A}_4 = (\Sigma, \cdot, \varepsilon)$, wobei $\Sigma = \{a, b\}$. Das ist der Wortmonoid, siehe Skript FGdI1 1.1.21.

Geben Sie Sätze $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, so dass für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\mathcal{A}_i \vDash \varphi_i \qquad \text{und für } j \neq i \quad \mathcal{A}_j \nvDash \varphi_i.$$

D.h. mit den Sätzen φ_i können die Strukturen unterschieden werden.

(d) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{A}$ für die Signatur an, die *kein* Monoid ist.