# Formale Grundlagen der Informatik II
# 1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Martin Ziegler**
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

**SS 2011**
**01.06.11**

## Minitest Lösung

a) Sei $\varphi$ eine syntaktisch korrekte aussagenlogische Formel. Welche der folgenden Aussagen stellen syntaktisch korrekte aussagenlogische Formeln dar?

☒ 1 ☐ 01 ☒ $\neg 1$ ☒ $1 \wedge (\neg 0 \vee \neg\neg\varphi)$

*Begründung:* Siehe FGdI II Skript, Definition 1.1.

b) Sei $V = \{p, q\}$ unsere Variablenmenge und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I}(p) = \mathfrak{I}(q) = 0$. Gilt $\mathfrak{I} \models \big((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\big)$?

☐ Ja ☒ Nein

*Begründung:* Die Aussage lässt sich umschreiben zu $\mathfrak{I} \models (p \vee q)$. Dann gilt $(p \vee q)^{\mathfrak{I}} = \max(\mathfrak{I}(p), \mathfrak{I}(q)) = 0$ nach FGdI II Skript, Definition 1.3. Entsprechend lässt sich auch $\big((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\big)^{\mathfrak{I}} = 0$ nachweisen.

c) Seien $A$ und $B$ zwei Aussagen, ausgedrückt als aussagenlogische Formeln.

i) $A$ ist hinreichend für $B$ bedeutet ☒ $A \rightarrow B$ ☐ $B \rightarrow A$

ii) $A$ ist notwendig für $B$ bedeutet ☒ $\neg A \rightarrow \neg B$ ☐ $\neg B \rightarrow \neg A$

iii) Für alle Modelle $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models (A \rightarrow B) \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models (\neg B \rightarrow \neg A)$. ☒ Richtig ☐ Falsch

*Begründung:* i) und ii) entsprechen den Definitionen von notwendigen respektive hinreichenden Bedingungen, und iii) drückt die Kontraposition einer Aussage aus.

## Gruppenübung

### Aufgabe G1

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

| $p$ | $q$ | $r$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchstens eine der Variablen $p, q, r$ wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r, s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

**Aufgabe G2**

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \to \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\varphi$ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch $\psi$ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi$ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch $\varphi$ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

(i) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

(ii) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

(iii) $\{\neg\psi, \psi \to \varphi\} \models \neg\varphi$

(iv) $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \neg\psi$

**Aufgabe G3** (KNF, DNF)

Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \ldots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) $\varphi_n$ genau $2^n$ verschiedene Modelle hat;

(b) $\varphi_n$ äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) jede zu $\varphi_n$ äquivalente Formel in DNF mindestens $2^n$ Disjunktionsglieder hat.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (4 Punkte)

Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel $\phi$ jeweils eine äquivalente Formel $\phi'$ gibt, sodass

(a) $\phi'$ nur die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ und keine Konstanten enthält. (Welche Eigenschaft muss hierfür die Variablenmenge haben?)

(b) $\phi'$ nur den Junktor $\rightarrow$ und die Konstante 0 enthält. (Wir fassen hier den Junktor $\rightarrow$ nicht als Abkürzung auf.)

**Aufgabe H2** (4 Punkte)

Definiere die Operation $\oplus$ (Exklusiv-Oder, XOR, Parity) durch $(p \oplus q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Sei $\varphi \in B_n$ eine Formel in DNF, d.h. von der Form $\varphi(\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^{m} m_i$ mit $m_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \ell_{i,j}$ als Konjunktion von Literalen $\ell_{i,j} \in \{x_j, \neg x_j\}$.

(a) Zeigen Sie: $p \wedge (q \oplus r) = (p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$.

(b) Drücken Sie die Formel

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

nur durch $\oplus$ und $\wedge$ aus, indem Sie sich überlegen, dass $m_i \vee m_j = m_i \oplus m_j$ für alle $m_i, m_j$ $(i \neq j)$ gilt. Wie können Sie $\neg x$ nur durch Operationen $\wedge, \oplus$ und Konstanten $0, 1$ darstellen? Was fällt Ihnen bezüglich des Auftretens von Teilformeln auf? Verkürzen Sie Ihre Formel so weit wie möglich und begründen Sie, warum dies korrekt ist.