Formale Grundlagen der Informatik I
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
18.05.11

Minitest Lösung

a) Betrachten Sie die Grammatiken $G_i = (\{a,b\}, S, X, Y\}, P_i, S)$ für $i \in \{1,2\}$ und mit

$$P_1: \begin{array}{lcl} S & \to & XY \\ X & \to & a \mid aX \\ Y & \to & b \mid bY \end{array} \qquad P_2: \begin{array}{lcl} S & \to & XY \\ X & \to & a \mid aX \\ Y & \to & b \mid Yb \\ XY & \to & YX \end{array}$$

Welchen Typ haben die Grammatiken G_1 und G_2? G_1: ☐ 3 ☒ 2 ☒ 1 ☒ 0
(mehrere Antworten möglich) G_2: ☐ 3 ☐ 2 ☒ 1 ☒ 0

Begründung: G_1 ist Typ 2, weil jede Produktion der Form $X \to v$ für eine Variable X und ein v ist. Sie ist nicht Typ 3, weil $X_0 \to XY$ bei regulären Grammatiken nicht erlaubt ist.
G_2 ist Typ 1, weil jede Produktion nicht verkürzend ist. Sie ist nicht Typ 2, weil $XY \to YX$ mehr als eine Variable auf der linken Seite hat.

b) Welche der folgenden Sprachen beschreibt die Grammatik G_1 aus a) ?

☐ $\{a^n b^n : n \geq 1\}$ ☐ $a^* b^*$ ☒ $aa^* bb^*$ ☐ $(a+b)^*$

Begründung: Aus X lässt sich genau a^{n+1} und $a^n X$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ableiten. Genauso lässt sich aus Y genau b^{m+1} und $Y b^m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ ableiten. Damit kann man aus S genau $a^{n+1} b^{m+1}$, $a^{n+1} Y b^m$, $a^n X b^{m+1}$, $a^n XY b^m$ für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ ableiten. Also $L(G_1) = \{a^{n+1} b^{m+1} : n, m \in \mathbb{N}\} = L(aa^* bb^*)$.

c) Welche der folgenden Implikationen gilt im Allgemeinen?
Die Sprache L ist regulär.

☐ $\Leftarrow$ ☒ $\Rightarrow$ Es gilt die Aussage aus dem Pumping Lemma, d.h. es gibt ein n, so dass sich jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq n$ in $x = u \cdot v \cdot w$ zerlegen läßt ...

☒ $\Leftarrow$ ☒ $\Rightarrow$ Die Relation $\sim_L$ hat endlichen Index.

Begründung: Nach Pumping Lemma, gilt natürlich die Aussage des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen. Umgekehrt gilt aber nicht, dass eine Sprache regulär ist, wenn sie die Aussage erfüllt. Ein Gegenbeispiel haben wir in der Aufgabe G3 im 5. Übungsblatt konstruiert. Die andere Aussage ist genau die Charakterisierung aus dem Satz von Myhill-Nerode.

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{a,b\}, \{X_0, X, Y\}, P, X_0)$ mit

$$P: \begin{array}{lcl} X_0 & \to & aXaY \\ X & \to & aXa \mid Y \\ Y & \to & bY \mid \varepsilon. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache.

(b) Bestimmen Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' ohne ε-Produktionen.

Aufgabe G2

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{a,b\}, \{X_0, X, Y\}, P, X_0)$ mit

$$\begin{array}{lll} P: & X_0 & \rightarrow & aXaY \mid aXa \mid aaY \mid aa \\ & X & \rightarrow & aXa \mid Y \mid aa \\ & Y & \rightarrow & bY \mid b. \end{array}$$

(a) Welche Sprache wird von G erzeugt?

(b) Konstruieren Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$.

(c) Entscheiden Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = aabaa$ in der von G' erzeugten Sprache $L(G')$ liegt. Ist w in $L(G')$ enthalten, so geben Sie zudem eine Ableitung in G' an.

Aufgabe G3

(a) Welche Sprache beschreibt die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ mit $\Sigma := \{a, b, c, \$\}$, $V := \{S, A, B, X, Y\}$ und Produktionen

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow AB & Xa \rightarrow aX \\ A \rightarrow aXA \mid \$ & X\$ \rightarrow \$Y \\ B \rightarrow bYB \mid \$ & Yb \rightarrow bY \\ & Y\$ \rightarrow \$c \end{array}$$

Beweisen Sie ihre Behauptung durch Induktion über die Menge der in G ableitbaren $(V \cup \Sigma)$-Wörter. Stellen Sie hierzu zuächst eine geeignete Induktionsbehauptung auf.

(b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache aus (a) an, d. h. eine Grammatik, bei welcher die linke Seite jeder Produktion aus einer einzigen Variablen besteht.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Gegeben sei eine Grammatik $G = (\{0,1\}, \{S, A, B, C\}, P, S)$ mit folgenden Produktionen:

$$\begin{array}{ll} P: & S \rightarrow AB \\ & A \rightarrow 0 \\ & B \rightarrow 1AB \mid ABC \mid 1 \\ & C \rightarrow 1C \mid \varepsilon \end{array}$$

(a) Überführen Sie G in eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform.

(b) Entscheiden Sie durch Ausführung des CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = 001011$ in der von G' erzeugten Sprache $L(G')$ liegt. (Der CYK-Algorithmus sei dabei wie in der Übung in einer $|w| \times |w|$-Tabelle durchzuführen.) Ist w in $L(G')$ enthalten, so geben Sie zudem eine Ableitung in G' an.

(c) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der $L(G)$ erkennt, und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion (beispielsweise durch Angabe des entsprechenden Satzes aus Abschnitt 4.1 des Skripts, dessen Beweis die konkrete Konstrukion eines PDA aus einer gegebenen Typ-2 Sprache aufzeigt).

Aufgabe H2 (Pumping-Lemma)

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^m a^n b^m \, : \, m, n \geq 0\}$$

nicht kontextfrei ist.