Formale Grundlagen der Informatik I
4. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
04.05.11

Minitest Lösung

Bestimmen Sie die korrekten Implikationen. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann gilt:

L ist regulär

a) ☐ ⇒ ☒ ⇐ L ist endlich

Begründung: Besteht L nur aus den endlich vielen Elementen $w_1, \dots, w_n$, dann kann L durch den regulären Ausdruck $w_1 + w_2 + \dots + w_n$ beschrieben werden. Umgekehrt ist Σ^* regulär, aber nicht endlich.

b) ☒ ⇒ ☒ ⇐ L wird von einem DFA akzeptiert

Begründung: Satz von Kleene (Satz 2.3.1 im Skript).

c) ☒ ⇒ ☒ ⇐ L wird von einem NFA akzeptiert

Begründung: Satz von Kleene (Satz 2.3.1 im Skript).

d) ☒ ⇒ ☐ ⇐ L enthält eine reguläre Sprache,
d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_1 \subseteq \Sigma^*$ mit $L_1 \subseteq L$

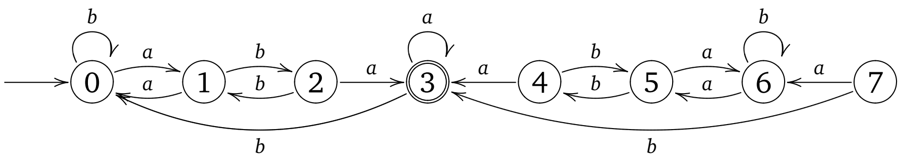
Begründung: Hinrichtung ist klar mit $L = L_1$. Rückrichtung: Jede Sprache L enthält die reguläre Sprache $\emptyset$, aber nicht jede Sprache ist regulär.

e) ☒ ⇒ ☐ ⇐ L ist Teilmenge einer regulären Sprache,
d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $L \subseteq L_2$

Begründung: Hinrichtung ist klar mit $L = L_2$. Rückrichtung: Wie d) aber mit Σ^*.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (DFA Minimierung)
Betrachten Sie den folgenden DFA:



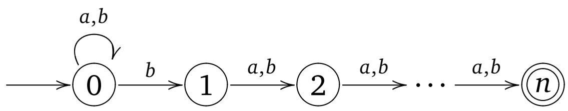
Gegeben ist die folgende unvollständige Tabelle für die Relation $\not\sim$. (Ein $\times$ an der Stelle p, q in der Tabelle bedeutet, dass $p \not\sim q$.) Vervollständigen Sie die Tabelle und geben Sie ggf. ein Wort an, für das diese Unterscheidung notwendig ist, d.h. ein Wort w, das zu L_q gehört, aber nicht zu $L_{q'}$ (oder umgekehrt), wobei $L_q := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q, w) \in A\}$.

$\not\sim$	0	1	2	3	4	5	6	7
0			×	×	×			×
1			×	×	×			×
2	×	×		×		×	×	×
3	×	×	×		×	×	×	×
4	×	×		×		×	×	×
5			×	×	×		×	×
6			×	×	×	×		×
7	×	×	×	×	×	×	×	

Aufgabe G2 (Umkehrung regulärer Sprachen)
Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache L auch die Umkehrung $\mathrm{rev}(L)$ regulär ist, indem Sie zeigen, wie man aus einem regulären Ausdruck für die Sprache L einen regulären Ausdruck für $\mathrm{rev}(L)$ gewinnen kann. Zur Erinnerung: Die Sprache $\mathrm{rev}(L)$ ist definiert als

$$\mathrm{rev}(L) := \{w^{-1} \in \Sigma^* \mid w \in L\}.$$

Aufgabe G3 (NFA, DFA Vergleich)
Betrachten Sie den folgenden NFA $\mathscr{A}_n$:

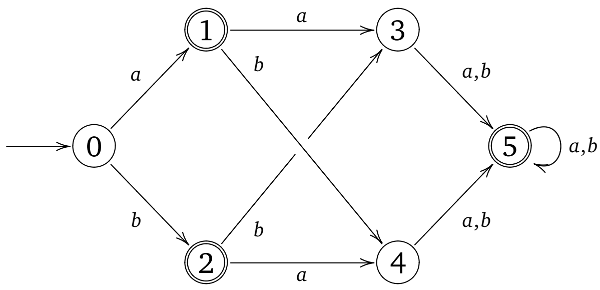


(a) Bestimmen Sie $L(\mathscr{A}_n)$.

(b) Zeigen Sie, dass es keinen äquivalenten DFA gibt mit weniger als 2^n Zuständen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Minimalautomaten und Minimierung) (4 Punkte)
Finden Sie einen äquivalenten DFA minimaler Größe für den folgenden DFA. Geben Sie im Zuge der Lösung auch die Relationen $\not\sim_i$ (für alle notwendigen i) explizit an.



Aufgabe H2 (Abgeschlossenheit der regulären Sprachen) (4 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie: Die Menge der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter den folgenden Operationen:

(a) In jedem Wort werden alle Buchstaben a durch b ersetzt und alle b durch a.

(b) Jedes zweite Vorkommen des Buchstaben a wird durch das Wort aba ersetzt.

(Extra) Die Buchstaben in jedem Wort dürfen beliebig umsortiert werden, d.h. ist etwa das Wort $aaba$ in der Sprache, so fügen wir auch die Wörter $aaab$, $abaa$ und $baaa$ hinzu.