Formale Grundlagen der Informatik I
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
27.04.11

Minitest Lösung

a) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? ☒ Jeder DFA ist ein NFA. ☐ Jeder NFA ist ein DFA.

Begründung: In einem DFA gibt es für jeden Buchstaben und von jedem Zustand aus *genau eine* Transition. In einem NFA gibt es beliebig viele. Daher ist jeder DFA auch ein NFA aber nicht umgekehrt.

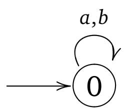
b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Welche Sprache beschreibt der folgende reguläre Ausdruck:

$$(a + b)^*(b + a)^*$$

- ☐ Alle Wörter, die aus zwei Kopien eine Wortes bestehen, also Wörter der Form ww für ein $w \in \Sigma^*$.
- ☐ Alle Palindrome, d.h. alle Wörter der Form ww^{-1} für ein $w \in \Sigma^*$, wobei w^{-1} das Wort w umgedreht ist.
- ☒ Alle Wörter in Σ^*.

Begründung: Sowohl $(a + b)$ also auch $(b + a)$ beschreiben die Sprache $\{a, b\}$. Damit beschreiben dann $(a+b)^*$ und $(b+a)^*$ jeweils Σ^*. Die Aussage folgt dann aus der Beobachtung, dass $\Sigma^* \cdot \Sigma^* = \Sigma^*$.

c) Welcher reguläre Ausdruck beschreibt die gleiche Sprache wie der folgende Automat:



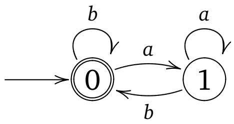
☐ $(ab)^*$ ☐ $(a + b)^*$ ☒ $\emptyset$ ☐ $\emptyset^*$

Begründung: Der Automat hat keinen akzeptierenden Zustand, deshalb wird kein Wort akzeptiert, d.h. der Automat erkennt die leere Sprache $\emptyset$. Beachten Sie, dass $L(\emptyset) = \emptyset$ aber $L(\emptyset^*) = \{\varepsilon\}$, siehe Skript Beispiel 2.1.5.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Reguläre Ausdrücke)

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Welche Sprache wird von dem folgenden DFA $\mathscr{A}$ akzeptiert?

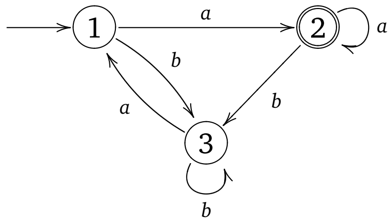


(b) Beschreiben Sie $L(\mathscr{A})$ durch einen regulären Ausdruck.

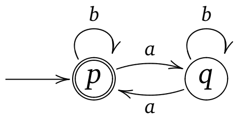
Aufgabe G2

Gegeben seien die folgenden DFA:

$\mathscr{A}_1$



$\mathscr{A}_2$



(a) Geben Sie einen DFA an, der $L(\mathscr{A}_1) \cap L(\mathscr{A}_2)$ erkennt.

(b) Geben Sie einen NFA an, der $L(\mathscr{A}_1) \cdot L(\mathscr{A}_2)$ erkennt.
Extra: Was ändert sich an der Lösung, wenn der Zustand 1 in $\mathscr{A}_1$ auch akzeptierend ist?

Aufgabe G3 (NFA-Umkehrung)

Für ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ wird w^{-1} durch $a_n \dots a_1$ definiert (d.h. w wird rückwärts gelesen). Die Sprache $\mathrm{rev}(L)$ ist definiert als

$$\mathrm{rev}(L) := \{w^{-1} \in \Sigma^* \mid w \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache L die Umkehrung $\mathrm{rev}(L)$ regulär ist, indem Sie zeigen, wie aus einem NFA, der die Sprache L erkennt, ein NFA, der die Sprache $\mathrm{rev}(L)$ erkennt, allgemein konstruiert werden kann.

Hinweise:

- Überlegen Sie sich dazu beispielhaft für den Automaten $\mathscr{A}_1$ aus Aufgabe G2 zunächst, wie solch ein „umgekehrter NFA“, erkennend die Sprache $\mathrm{rev}(L(\mathscr{A}_1))$, auszusehen hat.
- Überlegen Sie sich, wie sich die Umkehrung eines NFA mit mehreren akzeptierenden Zuständen durch Ausnutzung der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen auf den Fall mit nur einem akzeptierenden Zustand zurückführen lässt.

Hausübung

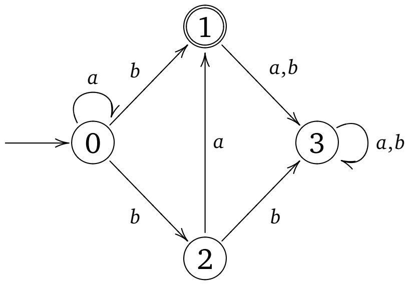
Aufgabe H1 (DFAs, NFAs und Potenzmengen-Trick) (8 Punkte)

(a) Sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ die Menge von Wörtern, die irgendwo zwei a’s nebeneinander haben, und sei M das Komplement (d.h., die Menge von Wörter die niemals zwei a’s nebeneinander haben).

(i) Bestimmen Sie reguläre Ausdrücke für L und M.

(ii) Bestimmen Sie DFAs, die genau die Sprache L bzw. die Sprache M erkennen.

(b) Betrachten Sie den folgenden NFA:



Bestimmen Sie einen DFA, der genau dieselbe Sprache erkennt. Geben Sie neben dem Automaten selbst auch die im Zuge der Lösung erstellte Tabelle an (siehe Skript, Beispiel 2.2.10).

Aufgabe H2 (Logik)
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\exists x \in \mathbb{N})\,[\, f(f(x)+1) \neq x \,].$$

(b) Geben Sie eine endliche Liste $t_1, \ldots, t_n$ von aus 0, f und $+1$ gebildeten Zahlen an, so dass für alle f

$$\bigvee_{i=1}^{n} [\, f(f(t_i)+1) \neq t_i \,]$$

gilt.