Formale Grundlagen der Informatik I
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
20.04.11

Minitest Lösung

a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Die Relation $R_1 = \{(v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid v \text{ ist Präfix von } w\}$ ist
☒ reflexiv ☐ symmetrisch ☒ transitiv

Begründung: Reflexiv, da jedes Wort Präfix von sich selbst ist.
Nicht symmetrisch, denn jedes (nicht leere) Wort $a \in \Sigma^*$ ist Präfix von $a \cdot a$, aber nicht umgekehrt.
Transitiv, denn wenn u Präfix von v und v Präfix von w ist, dann gilt per Definition $v = u \cdot v'$ für ein Wort v' und $w = v \cdot w'$ für ein Wort w'. Zusammen also $w = u \cdot v' \cdot w'$ und damit ist u auch Präfix von w.

b) Die Relation $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \cdot b \neq 0\}$ ist ☐ reflexiv ☒ symmetrisch ☒ transitiv

Begründung: Nicht reflexiv: $(0, 0) \notin R_2$. Symmetrie und Transitivität folgen aus der Beobachtung, dass für alle $(a, b) \in R_1$ gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

c) Seien A und B endliche Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

- Ist f injektiv, so folgt stets ☒ $|A| \leq |B|$ ☐ $|A| \geq |B|$

  Begründung: Wenn f injektiv ist, dann gibt es für jedes $y \in B$ maximal ein $x \in A$, so dass $f(x) = y$. Damit kann es nicht mehr Elemente in A geben als in B.

- Ist f surjektiv, so folgt stets ☐ $|A| \leq |B|$ ☒ $|A| \geq |B|$

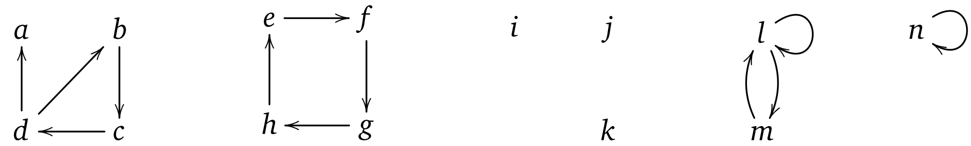
  Begründung: Wenn f surjektiv ist, dann gibt es für jedes $y \in B$ mindestens ein $x \in A$, so dass $f(x) = y$. Damit kann A nicht weniger Elemente als B enthalten.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wahrheitswertetafeln)
Zeigen Sie anhand von Wahrheitswertetafeln, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln äquivalent sind:

$$\neg(p \to q), \qquad p \wedge \neg q, \qquad (p \vee q) \wedge \neg q.$$

Aufgabe G2 (Graphhomomorphismen)
Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V von Knoten und einer Teilmenge $E \subseteq V \times V$ von Kanten. Gegeben seien die folgenden fünf gerichteten Graphen:



G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

Der Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ ist beispielsweise wie folgt formal gegeben:

$$V_1 = \{a, b, c, d\}$$
$$E_1 = \{(d, a), (d, b), (b, c), (c, d)\}$$

Geben Sie an, zwischen welchen der Graphen Homomorphismen existieren, und geben Sie auch gegebenenfalls einen Homomorphismus an.

Aufgabe G3
Seien X, Y beliebige Mengen und $p : Y \to X$ eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass durch

$$y_0 \sim y_1 :\Longleftrightarrow p(y_0) = p(y_1)$$

eine Äquivalenzrelation auf Y definiert wird. Zeigen Sie auch, dass es ein Bijektion zwischen $Y/\sim$ und X gibt.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
L und M seien Σ-Sprachen.

(a) Zeigen Sie, dass $L \subseteq L^*$ und $\big(L \subseteq M^* \Rightarrow L^* \subseteq M^*\big)$.
(b) Schließen Sie aus (a), dass $(L^*)^* = L^*$ und $\big(L \subseteq M \Rightarrow L^* \subseteq M^*\big)$.
(c) Zeigen Sie, dass $(L \cup M)^* = (L^* M^*)^*$.

Aufgabe H2 (Isomorphie von Graphen) (2 Punkte)
Finden Sie zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, so dass es einen bijektiven Homomorphismus $\varphi : V_1 \to V_2$ gibt, ohne dass G_1 und G_2 isomorph sind.

Extra: Kann es zwei Graphen G_1 und G_2 geben, so dass es bijektive Homomorphismen $\varphi : V_1 \to V_2$ und $\psi : V_2 \to V_1$ gibt, ohne dass G_1 und G_2 isomorph sind? Begründen Sie Ihre Antwort!