Formale Grundlagen der Informatik II 7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2011**
Prof. Dr. Martin Ziegler **13.07.11**
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

Gruppenübung

Aufgabe G1
Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(a) $\forall x Rx\, fx \vdash \exists x Rfx\, ffx$.

(b) $\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy$.

(c) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$.

(d) $\forall x(Px \to Pfx) \vdash \forall x(Px \to Pffx)$.

Lösungsskizze:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x Rxfx, Rfcffc \vdash Rfcffc, \exists x Rfxffx}\ (\mathrm{Ax})}{\forall x Rxfx \vdash Rfcffc, \exists x Rfxffx}\ (\forall \mathrm{L})}{\forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx}\ (\exists \mathrm{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y \forall x Rxy, \forall x Rxb, Rab \vdash Rab, \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\ (\mathrm{Ax})}{\exists y \forall x Rxy, \forall x Rxb \vdash Rab, \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\ (\forall \mathrm{L})}{\exists y \forall x Rxy, \forall x Rxb \vdash \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\ (\exists \mathrm{R})}{\exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\ (\exists \mathrm{L})}{\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy}\ (\forall \mathrm{R})$$

(c) Beachte, dass $\psi(c/x) = \psi$ ist, da $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \forall x \varphi, \psi}\ (\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{\forall x(\varphi \vee \psi), \psi \vdash \varphi(c/x), \forall x \varphi, \psi}\ (\mathrm{Ax})}{\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vee \psi \vdash \varphi(c/x), \forall x \varphi, \psi}\ (\vee \mathrm{L})}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(c/x), \forall x \varphi, \psi}\ (\forall \mathrm{L})}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi}\ (\forall \mathrm{R})}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi}\ (\vee \mathrm{R})$$

(d)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$Pa \vdash Pa, Pfa, Pffa$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$Pa, \neg Pa \vdash Pfa, Pffa$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$Pa, Pfa \vdash Pfa, Pffa$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$Pa, \neg Pa \vee Pfa \vdash Pfa, Pffa$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$Pa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pfa, Pffa$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$Pa, \neg Pfa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$Pa, Pffa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$Pa, \neg Pfa \vee Pffa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$Pa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Pfx) \vdash \neg Pa, Pffa$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Pfx) \vdash \neg Pa \vee Pffa$}
\RightLabel{($\forall$R)}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Pfx) \vdash \forall x(Px \to Pffx)$}
\end{prooftree}
$$

Aufgabe G2

Sei $S = (+, \cdot, 2^x, <, 0, 1)$ die Signatur der Arithmetik mit Exponentation. In dieser Aufgabe bezeichnet $\mathcal{N}$ das Modell der natürliche Zahlen mit Exponentation über S, also $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, (2^x)^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$.

(a) Zeigen Sie, dass für einen quantorfreien Satz $\varphi[u]$ (mit Parameter u) entscheidbar ist, ob $\mathbb{N} \models \varphi[u]$, d.h. dass die Funktion

$$\chi(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{N} \not\models \varphi[\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}}] \\ 1 & \text{falls } \mathcal{N} \models \varphi[\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}}] \end{cases}$$

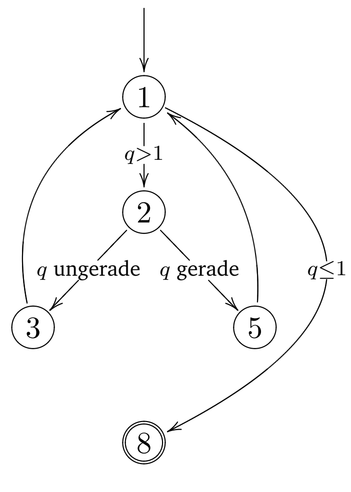
berechenbar ist.
Bemerken Sie, dass diese Ergebnis auf für Erweiterungen

$$\mathcal{N}(f_1, f_2, \dots) = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, (2^x)^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, f_1, f_2, \dots)$$

über der Signatur $S \cup (f_1, f_2, \dots)$ gilt, wenn die Funktionen $f_1, f_2, \dots$ berechenbar sind.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst atomare Formeln.

Wir modellieren nun in $\mathcal{N}$ den Ablauf von Programmen.
Betrachten Sie das folgend Programm und den dazugehörigen Control-Flow-Graphen

Require: $q \in \mathbb{N}$
1: **while** $q > 1$ **do**
2:   **if** q ungerade **then**
3:     $q \leftarrow 3 \cdot q + 1$
4:   **else**
5:     $q \leftarrow q \div 2$
6:   **end if**
7: **end while**
8: **return**

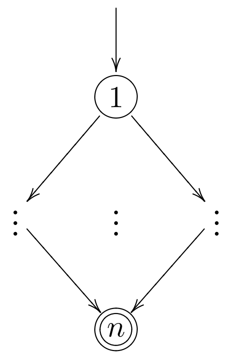


Man kann nun den Lauf des Programms bei der Eingabe von q durch zwei Funktionen $f(q,n)$, $g(q,n)$ kodieren, wobei $f(q,n)$ das Statment (i.e. in diesem Fall die Programmzeile), bei dem das Programm nach n Schritten bei der Eingabe q ist, beschreibt und $g(q,n)$ den Wert der Variable q zu diesem Zeitpunkt. Falls das Programm bei Eingabe q hält, dann beschreibt $f(q,\cdot)$ einen Pfad von 1 nach 8 im Contorl-Flow-Graphen, wenn nicht dann einen unendliche Pfad, der bei 1 startet.

(b) Definieren Sie (durch simultane Rekursion) die Funktionen f, g für das oben gegebene Programm.

(c) Betrachten Sie nun ein beliebiges Programm (mit einer Variable q), das ein Control-Flow-Graphen der Form wie rechts angegeben hat und bei dem n der einzige Endzustand ist.
Geben Sie einen Sätze ψ_1, ψ_2 an so dass
- $\mathcal{N}(f,g) \models \psi_1$ genau dann wenn das Programm hält,
- $\mathcal{N}(f,g) \models \psi_2$ genau dann wenn das Programm lineare Laufzeit (in der Länger, d.h. Anzahl der Bits, der Eingabe) hat.

Folgern Sie, dass $\mathcal{N}(f_1,\dots) \models \varphi$ für f_i berechenbar im Allgemeinen nicht entscheidbar ist.



Lösungsskizze:

- Die atomaren Formeln über dieser Struktur haben die Form $t_1 = t_2$ bzw. $t_1 < t_2$ für Terme t_1, t_2. Wenn die Termen geschlossen sind, was hier der Fall ist, da u substituiert wird, dann können die Terme einfach zu einer natürlichen Zahl ausgerechnet werden. Da das Vergleichen von natürliche Zahlen entscheidbar ist, folgt die Aussage für atomare Formeln. Für allgemeine quantorfreie Formeln folgt die Aussage, wenn man bemerkt, dass Entscheidbarkeit unter boolschen Operationen abgeschlossen ist.
-

$$f(q,0) := 1$$

$$f(q,n+1) := \begin{cases} 2 & \text{falls } f(q,n) = 1 \text{ und } g(q,n) > 1 \\ 3 & \text{falls } f(q,n) = 2 \text{ und } g(q,n) \text{ ungerade} \\ 5 & \text{falls } f(q,n) = 2 \text{ und } g(q,n) \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } f(q,n) = 3 \text{ oder } f(q,n) = 5 \\ 8 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(q,0) := q$$

$$g(q,n+1) := \begin{cases} 3 \cdot g(q,n) + 1 & \text{falls } f(q,n) = 3 \\ \lfloor g(q,n) \div 2 \rfloor & \text{falls } f(q,n) = 5 \\ g(q,n) & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\psi_1 :\equiv \forall q\, \exists x\, f(q,x) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}$

  Wir wollen ausdrücken dass für jede Eingabe (die Variable q) das Programm nach weniger als $c \cdot \log_2(q)$ Schritten, für eine Konstante c, endet.

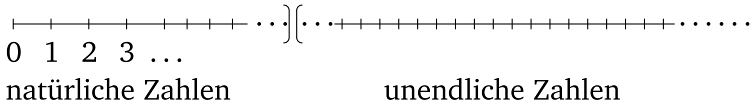
  $$\psi_2 :\equiv \exists c \forall q \forall q' \left(\left(2^{q'} < q \wedge q < 2^{q'+1} + 1\right) \to \exists x < q' + 1\; f(q,x) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-mal}} \right)$$

  $\mathcal{N}(f_1,\dots)$ ist im Allgemeinen nicht entscheidbar. Wählt man für $f_1 = f$ eine Funktionen die den Lauf der universellen TM simuliert, dann würde ein Entscheidungalgorithmus für ψ_1 das Halteproblem lösen.

Aufgabe G3
Sei nun $S = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ die Signatur der Arithmetik und und $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$ das Modell der natürlichen Zahlen. Dieses Modell wird auch *Standardmodell* genannt. Weiterhin sei

$$T = Th(\mathcal{N})$$

die Menge der $\mathrm{FO}(S)$-Sätze über der Signatur S, die wahr sind in $\mathcal{N}$. Wie in der Vorlesung besprochen (siehe Skript 4.3) beschreibt T das Modell $\mathcal{N}$ nicht eindeutig, d.h. es gibt auch anderen Modelle von T. Solche Modelle werden *Nichtstandardmodelle* genannt.
Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass jedes Nichtstandardmodell eine Kopie von $\mathcal{N}$ enthält. Wir zeigen weiter, dass jedes Element, das nicht zu dieser Kopie von $\mathcal{N}$ gehört, größer ist als jedes Element in dieser Kopie, d.h. dass diese Zahlen „unendlich“ sind. Nichtstandardmodelle haben damit die Form:



Sei nun ${}^*\mathcal{N} = ({}^*\mathbb{N}, +^{*\mathbb{N}}, \cdot^{*\mathbb{N}}, <^{*\mathbb{N}}, 0^{*\mathbb{N}}, 1^{*\mathbb{N}})$ ein Nichtstandardmodell. Betrachten Sie die Abbildung

$${}^*(-) : \mathbb{N} \to {}^*\mathbb{N} : n \mapsto {}^*n = \begin{cases} 0^{*\mathbb{N}} & \text{wenn } n = 0 \\ (\underbrace{1^{*\mathbb{N}} +^{*\mathbb{N}} 1^{*\mathbb{N}} +^{*\mathbb{N}} \ldots +^{*\mathbb{N}} 1^{*\mathbb{N}}}_{n-\text{mal}}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung ${}^*(-)$ ein injektiver Homomorphismus ist, d.h. dass die Abbildung die Interpretationen der Konstanten $0, 1$ in $\mathcal{N}$ auf die entsprechenden Interpretationen in ${}^*\mathcal{N}$ abbildet, und dass die Operationen $+, \cdot$ und die Ordnung $<$ erhalten werden.
Das Bild von ${}^*(-)$ verhält sich also wie $\mathcal{N}$ und ist damit eine Kopie von $\mathcal{N}$ in ${}^*\mathcal{N}$.
Hinweis: Verwenden Sie hier und in den nächsten Teilaufgaben, dass alles, was in $\mathcal{N}$ wahr ist *und sich durch einen Satz in der Logik 1. Stufe ausdrücken lässt*, auch in ${}^*\mathcal{N}$ wahr ist und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie, dass alle Elemente, die nicht im Bild von ${}^*(-)$ liegen, größer als jedes ${}^*n$ (für $n \in \mathbb{N}$) sein müssen.
Diese Elemente von ${}^*\mathcal{N}$ sind die *unendlichen* Zahlen.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes unendliches Element x in ${}^*\mathbb{N}$ ein anderes unendliches Element y gibt, so dass $2y \leq x$.

Lösungsskizze:

(a) Die Bilder von $0^{\mathbb{N}}$ und $1^{\mathbb{N}}$ sind per Definition $0^{*\mathbb{N}}$ bzw. $1^{*\mathbb{N}}$.
Um die Erhaltung der Operationen und der Ordnung zu beweisen, benutzen wir folgende Schreibweise: Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Term

$$\underline{n} := \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0 \\ (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dass die Operation $+$ von ${}^*(-)$ erhalten wird, zeigen wir unter Zuhilfenahme der Sätze $\varphi_{m,n,k} := \underline{m} + \underline{n} = \underline{k}$ für $m, n, k \in \mathbb{N}$. Beachte, dass $\mathcal{N} \models \varphi_{m,n,k}$ genau dann, wenn $m + n = k$ in den natürlichen Zahlen gilt. Es gilt

$${}^*m +^{*\mathbb{N}} {}^*n = {}^*k \iff {}^*\mathcal{N} \models \underline{m} + \underline{n} = \underline{k} \iff \mathcal{N} \models \underline{m} + \underline{n} = \underline{k} \iff m + n = k \text{ in } \mathbb{N}.$$

Analog zeigt man dies für $\cdot$ und $<$.
Der Homomorphismus ist injektiv, weil für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \neq m \iff \mathcal{N} \models \neg \underline{n} = \underline{m} \iff {}^*\mathcal{N} \models \neg \underline{n} = \underline{m} \iff {}^*n \neq {}^*m.$$

(b) $\mathcal{N} \models \forall x \forall y (x < y \lor y > x \lor x = y)$, also ist auch ${}^*\mathcal{N}$ eine lineare Ordnung. Neue Elemente sind deshalb entweder kleiner als 0, liegen zwischen ${}^*n$ und ${}^*(n+1)$ oder sind größer als alle ${}^*n$. Die ersten beiden Fälle sind unmöglich, da die Sätze $\neg \exists x x < 0$ und $\neg \exists x (\underline{n} < x \land x < \underline{n+1})$ in $\mathcal{N}$ erfüllt sind und deshalb auch in ${}^*\mathcal{N}$ erfüllt sein müssen.

(c) $\mathcal{N}$ erfüllt den Satz $\forall x \exists y (y + y = x \lor (y + y) + 1 = x)$, also muss dieser auch in ${}^*\mathcal{N}$ wahr sein. Also gibt es für jedes unendliches Element $x \in {}^*\mathbb{N}$ ein Element $y \in {}^*\mathbb{N}$, so dass $y +^{{}^*\mathbb{N}} y = x$ oder $(y +^{{}^*\mathbb{N}} y) +^{{}^*\mathbb{N}} 1^{{}^*\mathbb{N}} = x$. Dieses Element y muss unendlich sein, da sonst auch $y +^{{}^*\mathbb{N}} y$ und $(y +^{{}^*\mathbb{N}} y) +^{{}^*\mathbb{N}} 1$ endlich wären.

Hausübung

Aufgabe H1 (Nim-Spiel)
Betrachten Sie das folgende Spiel: Gegeben seien zwei Spieler, w und s, sowie h Streichhölzer. Beide Spieler nehmen abwechselnd mindestens ein, maximal aber drei Streichhölzer pro Zug. Der Spieler, der am Ende die letzten Streichhölzer nimmt, verliert.

(a) Überlegen Sie sich für $h = 4$ Streichhölzer alle möglichen Spielsituationen, und ob es eine Lösungsstrategie für den beginnenden Spieler (dies sei ohne Einschränkung w) gibt. Können Sie daraus für 5 Streichhölzer ableiten, ob w eine Gewinnstrategie besitzt?
Hinweis: Stellen Sie die Spielzüge durch ein Transitionssystem (FGdI I) dar.

(b) Geben Sie eine FO-Formel $\psi(h)$ an die beschreibt, ob Spieler w bei anfänglich h Streichhölzern eine Gewinnstrategie besitzt. (Sie können dafür eine geeignete Signatur wählen.)

(c) Geben Sie ein Prolog-Programm für $\psi(h)$ an und bestimmen Sie für $h = 1, \ldots, 20$ an, ob Spieler w eine Gewinnstrategie besitzt.

Lösungsskizze:

(a) Wir konstruieren einen Spielbaum dafür, dass Spieler w bei 4 Streichhölzern das Spiel beginnt. Ein Knoten (x, y) bedeute, Spieler x sei am Zug und es seien noch y Streichhölzer übrig.

$$\begin{tikzcd}
 & (w,4) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(s,3) \arrow[d] \arrow[dr] & (s,2) \arrow[d] \arrow[dr] & (s,1) \arrow[d] \\
(w,2) \arrow[d] \arrow[dr] & (w,1) \arrow[dr] & w \text{ gewinnt} \\
w \text{ verliert} & (s,1) \arrow[d] & w \text{ verliert} \\
 & w \text{ gewinnt} &
\end{tikzcd}$$

Demnach hat w bei ursprünglich 4 Streichhölzern eine Gewinnstrategie.
Erkenntnis: Hat der beginnende Spieler bei h, $h+1$ und $h+2$ Streichhölzern eine Gewinnstrategie, so kann er bei $h+3$ Streichhölzern *keine* haben. Begründung: Nimmt der beginnende Spieler $i \in \{1, 2, 3\}$ Streichhölzer, so verbleiben $h+3-i$; dafür hat dann aber, nach Voraussetzung, der andere Spieler eine Gewinnstrategie. Demnach kann der beginnende Spieler nicht gewinnen.

(b) Basierend auf den Erkenntnissen aus Teilaufgabe (a) formulieren wir die FO-Formel $\varphi(h)$ induktiv wie folgt:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \neg\forall x(x = x),\\ \varphi(2) &= \varphi(3) = \exists x(x = x),\\ \varphi(h) &= \neg\left(\varphi(h-3) \wedge \varphi(h-2) \wedge \varphi(h-1)\right)\end{aligned}$$

(c) Eine mögliche Lösung wäre:

```
neg(X) :- \+ call(X).
phi(2).
phi(3).
phi(H) :- H>3, H3 is H-3, neq(phi(H3)).
phi(H) :- H>3, H2 is H-2, neg(phi(H2)).
phi(H) :- H>3, H1 is H-1, neg(phi(H1)).
```

Wir erhalten allgemein, dass Spieler w für $h \in \{1 + 4n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *keine* Gewinnstrategie besitzt.

Aufgabe H2

(a) Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar, welche sind rekursiv aufzählbar?

(i) $\mathrm{SAT}(\mathrm{AL}) := \{\varphi \in \mathrm{AL} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(ii) $\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} : \varphi \models \psi\}$

(iii) $\mathrm{SAT}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(iv) $\mathrm{VAL}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

(v) $\mathrm{UNSAT}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

(b) Für eine Klasse L von FO-Sätzen gelte die folgende „Endliche-Modell-Eigenschaft“:
Jeder erfüllbare Satz $\varphi \in L$ hat ein endliches Modell.

Argumentieren Sie, dass Erfüllbarkeit für Sätze aus L entscheidbar ist.

Hinweis: Man erinnere sich, dass eine Menge entscheidbar ist, falls man die Menge selbst und auch ihr Komplement aufzählen kann (warum?). Diesen Sachverhalt kann man für $\mathrm{SAT}(L)$ und $L \setminus \mathrm{SAT}(L)$ ausnutzen.

(c) Zeigen Sie, dass Erfüllbarkeit für universell-pränexe FO-Sätze in einer Symbolmenge ohne Funktionssymbole (nur Relationen und Konstanten) entscheidbar ist.

Hinweis: Man überlege sich, zunächst für Sätze ohne Gleichheit, wie deren Herbrand-Modelle aussehen.

Lösungsskizze:

(a) (i) Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(ii) Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(iii) Diese Menge ist nicht entscheidbar (Satz von Church und Turing, S. 37 im Skript). $L\setminus\mathrm{SAT}(\mathrm{FO})$ besteht aus den Sätzen φ, die nicht erfüllbar sind, oder, anders gesagt, aus den Sätzen φ, für die $\neg\varphi$ allgemeingültig ist. Das Komplement von $\mathrm{SAT}(\mathrm{FO})$ ist also wegen des Vollständigkeitssatzes rekursiv aufzählbar. Da eine rekursiv aufzählbare Menge, deren Komplement auch rekursiv aufzählbar ist, sogar entscheidbar ist, kann $\mathrm{SAT}(\mathrm{FO})$ also nicht rekursiv aufzählbar sein.

(iv) Wegen des Kompaktheitssatzes ist diese Menge rekursiv aufzählbar. Sie ist nicht entscheidbar, da eine Formel φ erfüllbar ist, genau dann wenn $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig ist. Erfüllbarkeit ist für FO aber nicht entscheidbar.

(v) Diese Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar. (Eine Formel φ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\neg\varphi$ allgemeingültig ist, also ist diese Menge nach (d) rekursiv aufzählbar. Sie ist nach (c) nicht entscheidbar, da eine Formel unerfüllbar ist, genau dann wenn sie nicht erfüllbar ist.)

(b) Sei $S(\varphi)$ die Signatur, die genau die Symbole enthält, die in einem Satz φ vorkommen. Offenbar ist $S(\varphi)$ stets endlich.

Um zu entscheiden ob φ erfüllbar ist, reicht es, wegen der Endliche-Modell-Eigenschaft endliche $S(\varphi)$-Strukturen über Trägermengen $\{1, ..., n\}$ für $n \geq 1$ zu betrachten. Davon gibt es für jedes feste n nur endliche viele (es gibt nur endlich viele Möglichkeiten die Funktions-, Relationssymbole, Konstanten in $S(\varphi)$ zu belegen) und damit kann nach dem kleinsten n, so dass es ein Modell dieser Größe gibt, gesucht werden.

$\overline{\mathrm{SAT}}(\mathrm{FO})$ ist aufgrund des Vollständigkeitssatzes rekursiv aufzählbar. Man kann also für einen Kandidaten $\varphi \in L$ parallel nach einem endlichen Modell und nach einem Nachweis für die Unerfüllbarkeit von φ (d.h., die Allgemeingültigkeit von $\neg\varphi$) suchen. Aufgrund der „Endliche-Modell-Eigenschaft“ wird eine dieser Suchen schließlich fündig und zeigt an, ob φ erfüllbar ist oder nicht.

(c) Universelle Sätze ohne Gleichheit sind genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell haben. Da die Signatur keine Funktionssymbole enthält, sind die einzigen Terme über $S(\varphi)$ die Konstanten, die in dem Satz φ vorkommen. Also ist jedes Herbrand-Modell endlich, d.h. die Klasse der universell-pränexen gleichheitsfreien Sätze ohne Funktionssymbole hat die „Endliche-Modell-Eigenschaft“ und das Problem ist nach (a) entscheidbar.

Bei Sätzen mit Gleichheit kann $=$ mit einem neuen Relationssymbol $\sim$ eliminiert werden, so dass der Satz weiterhin universell-pränex bleibt. (Die Sätze, die aussagen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und die Sätze die aussagen, dass $\sim$ mit allen Relationen verträglich ist, sind universell und gleichheitsfrei. Siehe Skript FO S.12.) Da der ursprüngliche Satz und der so neu erzeugte Satz, erfüllbarkeitsäquivalent sind, kann das oben erwähnte Verfahren nun angewendet werden.