Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2011**
Prof. Dr. Martin Ziegler **28.06.11**
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

Minitest Lösung

a) Sei $S = (c, f, P)$ und $F = \forall x \forall y fxPcy$ eine geschlossene Formel in Skolem-Normalform; f sei dabei ein zweistelliges Funktions- und P ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie die Menge $T_0(S)$ aller variablenfreien Terme über S zur Formel F an.

- ☐ $M_1 := \emptyset$
- ☐ $M_2 := \{c, x, y, fxPcy\}$
- ☐ $M_3 := \{c, Pcc, PPccc, PcPcc, \dots\}$
- ☒ $M_4 := \{c, fcc, ffccc, fcfcc, \dots\}$

Begründung: c ist eine Konstante, f ein Funktionssysmbol gemäß Vereinbarung des Skripts und der Vorlesung. $T_0(S) \neq M_1$, da $c \in T_0(S)$. $T_0(S) \neq M_2$, da $T_0(S)$ u.a. variablenfrei ist. $T_0(S) \neq M_3$, da P eine Relation ist. $T_0(S) = M_4$ nach Definition 1.3 im FO-Skript.

b) In der FO mit Gleichheit gibt es Formeln, die nur in Strukturen, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten, erfüllbar sind. ☒ Richtig ☐ Falsch

Begründung: Die Formel $\forall x \forall y \forall z \, ((x = y) \lor (x = z) \lor (y = z))$ ist nur in Strukturen erfüllbar, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten. Anmerkung: Die Formel $\exists x \exists y \neg (x = y)$ ist dagegen nur in Strukturen erfüllbar, deren Grundmengen mindestens zwei Elemente enthalten.

c) Jede PNF-Formel (pränexe Normalform) ist auch in SKNF (Skolem-Normalform). ☐ Ja ☒ Nein

Begründung: Gegenbeispiel: $\exists x Px$ ist nicht in SKNF, da sie nicht ausschliesslich All-Quantoren enthält.

d) Jede SKNF-Formel ist auch in PNF. ☒ Ja ☐ Nein

Begründung: Nach Definition ist jede SKNF-Formel eine PNF-Formel ohne Existenz-Quantoren.

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln, wobei c ein Konstantensymbol, P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationsymbol ist:

(1) $\forall x (Pc \land \exists y (Px \leftrightarrow \neg Py))$

(2) $\forall x (Px \lor \exists x \neg Px)$

(3) $(\forall x \exists y (Rxy \to \forall x \exists y Ryx))$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(b) Geben Sie für die Formel aus (1) ein Herbrand-Modell an.

(c) Gegeben die Signatur $S = (1, +)$. Geben Sie die Trägermenge $\mathcal{T}_0(S)$ der Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ zu S an. Geben Sie auch, sofern existent, eine erfüllbare Formel *mit Gleichheit* an, für die $\mathcal{H}$ *kein* Modell ist.

Lösungsskizze:

(a) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

(1) Pränexe Normalform:

$$\forall x(Pc \wedge \exists y(Px \leftrightarrow \neg Py)) \quad \equiv \quad \forall x \exists y(Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg Py))$$

Skolemnormalform: $\forall x(Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg P f_y x)$ für ein neues einstelliges Funktionssymbol f_y.

(2) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \forall x(Px \vee \exists x \neg Px) \quad &\equiv \quad \forall x(Px \vee \exists y \neg Py) \\ &\equiv \quad \forall x \exists y(Px \vee \neg Py) \end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall x(Px \vee \neg P f_y(x))$ für ein neues einstelliges Funktionssymbol f_y.

(3) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y(Rxy \rightarrow \forall x \exists y Ryx) \quad &\equiv \quad \forall x \exists y(Rxy \rightarrow \forall z \exists t Rtz) \\ &\equiv \quad \forall x \exists y(\neg Rxy \vee \forall z \exists t Rtz) \\ &\equiv \quad \forall x \exists y \forall z \exists t(\neg Rxy \vee Rtz) \\ &\equiv \quad \forall x \exists y \forall z \exists t(Rxy \rightarrow Rtz) \end{aligned}$$

Achtung: Wenn man einen Quantor aus der Prämisse einer Implikation herauszieht, muss man ihn dualisieren! Wenn man ihn aus der Konklusion herauszieht bleibt der Quantor dagegen erhalten.

Skolemnormalform: $\forall x \forall z(Rx f_y(x) \rightarrow R f_t(x, z) z$ für ein neues Konstantensymbol c und ein einstelliges Funktionssymbol f_t.

(b) Eine Herbrand-Struktur zur Signatur $S = (c, f_y, P)$ ist $\mathcal{H} = (\mathcal{T}_0(S), c^{\mathcal{H}}, f_y^{\mathcal{H}}, P^{\mathcal{H}})$, wobei $\mathcal{T}_0(S)$ die variablenfreien Terme über S sind, also die Elemente von der Form c, fc, ffc, etc., $c^{\mathcal{H}} = c$ und $f_y^{\mathcal{H}}(f^n c) = f f^n c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $P^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{T}_0(S)$ muss so gewählt sein, dass $\forall x(Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg P f_y x)$ erfüllt wird. Die Formel besagt, dass $c \in P^{\mathcal{H}}$ gelten soll und dass jede Anwendung von f Elemente bezüglich $P^{\mathcal{H}}$ wie eine Negation wirkt, das heißt jeder zweite Term muss in $P^{\mathcal{H}}$ liegen. Wir setzen also $P^{\mathcal{H}} := \{f^n c : n \text{ ist gerade}\}$.

(c) Die Herbrand-Struktur $\mathcal{H} = (\mathcal{T}_0(S), 1^{\mathcal{H}}, +^{\mathcal{H}})$ ist gegeben durch die Trägermenge $T_0(S) = \{1, +11, ++111, +1+11, \dots\}$, sowie die Interpretationen $1^{\mathcal{H}} := 1$ und $+^{\mathcal{H}} t_1 t_2 := +t_1 t_2$ für alle $t_1, t_2 \in T_0(S)$. Es gibt eine erfüllbare Formel *mit Gleichheit*, für die $\mathcal{H}$ *kein* Modell ist; beispielsweise $\varphi := (++111 = +1+11)$. Die Formel φ ist erfüllbar über $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}})$, jedoch gilt $\mathcal{H} \not\models \varphi$. Grund:

$$(++111 = +1+11)^{\mathcal{H}} = 1 \Longleftrightarrow ++111^{\mathcal{H}} = +1+11^{\mathcal{H}},$$

aber da für Konstanten- und Funktionssymbole nach Konstruktion Syntax gleich Semantik ist, sind gilt $++111^{\mathcal{H}}$ und $+1+11^{\mathcal{H}}$ atomar und es gilt

$$++111^{\mathcal{H}} = ++111 \neq +1+11 = +1+11^{\mathcal{H}}.$$

Aufgabe G2

$\preceq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \big) \Big).$$

Sei $\mathcal{A} = (A, \preceq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2\}$ und $\preceq^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}$.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.

Hinweis:

i. Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.

ii. Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

iii. Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \big) \Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform.

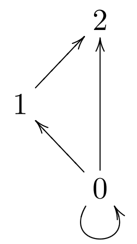
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Lösungsskizze:

(a) Eine Menge mit einer zweistelligen Relation ist i.A. ein (gerichteter) Graph, also kann man $\mathcal{A}$ folgendermaßen darstellen



und $\varphi^{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass es zu zwei Elementen x_1 und x_2 ein Element x_3 gibt, mit $x_3 \rightarrow x_1$ und $x_3 \rightarrow x_2$ und sodass es zu jedem x_4 mit $x_4 \rightarrow x_1$ und $x_4 \rightarrow x_2$ eine Kante $x_4 \rightarrow x_3$ gibt. Man überprüft leicht, dass für $x_1 \mapsto 2$ und $x_2 \mapsto 2$ kein x_3 mit der benötigten Eigenschaft existiert, also $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Als nächstes formen wir φ in Negationsnormalform um:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\ &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big(\neg (x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\ &\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big)}_{=:\varphi'} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ der Falsifizierer in der Spielposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ *eine Gewinnstrategie hat*: Angenommen der Falsifizierer zieht von der Position

$$\Big(\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right)\right), (a_1, a_2, a_3, a_4)\Big)$$

nach

$$\Big(\forall x_2 \exists x_3 \left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right)\right), (2, a_2, a_3, a_4)\Big)$$

und von dort nach

$$\Big(\exists x_3 \left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right)\right), (2, 2, a_3, a_4)\Big)$$

dann hat der Verifizierer drei Möglichkeiten zu ziehen:

$a_3 \mapsto 2$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 2, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (2, 2, 2, a_4)\Big)$$

und

$$\Big(x_3 \preceq x_1, (2, 2, 2, a_4)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 1$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 1, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 1, a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2, 2, 1, 1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \models 1 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 0$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 0, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 0, a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2, 2, 0, 1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 0$ und $\mathcal{A} \models 1 \preceq 2$.

Also hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie, und es gilt $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(b) Wir zeigen, dass der Verifizierer für alle $(a_1', a_2') \in A \times A \setminus \{(2,2)\}$ eine Gewinnstrategie hat: Der Verifizierer zieht von $(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$ nach

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (a_1', a_2', 0, a_4)\Big)$$

Der Falsifizierer hat nun zwei Zugmöglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\big(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (a_1', a_2', 0, a_4)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preceq x$ für alle $x \in A$.

ii. Er zieht nach

$$\big(\forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (a_1', a_2', 0, a_4)\big)$$

dann hat der Falsifizierer im nächsten Zug drei Möglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 0)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preceq 0$

ii. Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 1)\big)$$

oder

$$\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 2)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer in zwei Zügen, da a_1' oder a_2' ungleich 2 ist und $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 0$ bzw. $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 0$ gelten.

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)

Betrachten Sie folgende Formelmenge, wobei P ein einstelliges Relations-, sowie L und R zweistellige Relationssymbole seien:

(1) $\forall x \exists y Rxy$

(2) $\forall x \exists y Lxy$

(3) $\exists x Px$

(4) $\forall x \forall y (Lxy \to Rxy)$

(5) $\forall x \forall y ((Px \wedge Rxy) \to Py)$

(a) Geben Sie die Skolem-Normalform der Sätze (1)–(5) an.

(b) Zeigen Sie dass die Sätze (1)–(5) erfüllbar sind, indem sie ein Herbrandmodell angeben.

(c) Zeigen Sie, dass die Formelmenge unerfüllbar wird, wenn (3) durch die Formel

$$(3') \quad \exists x (Px \wedge \forall y (Lxy \to \neg Py))$$

ersetzt wird. Argumentieren Sie dass es kein Herbrandmodell für die neue Formelmenge geben kann.

Hinweis: Durch das Ersetzen von (3) durch (3') ändert sich die Trägermenge des Herbrandmodells *nicht* (wenn wir dieselbe Skolemkonstante „c" verwenden).

Lösungsskizze:

(a) (1) $\forall x Rxf(x)$

(2) $\forall x Lxg(x)$

(3) Pc

(4) ,(5) Diese Sätze sind schon in Skolem-Normalform.

(b) Sei $T_0 := \{c\}$ und $T_{n+1} := \{f(t), g(t) \colon t \in T_n\}$. Dann ist $\mathcal{T} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ die Trägermenge der Sätze aus (a). Das Herbrandmodell $\mathcal{H} := (\mathcal{T}, R^{\mathcal{H}}, L^{\mathcal{H}}, P^{\mathcal{H}})$ mit $R^{\mathcal{H}} = L^{\mathcal{H}} = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ und $P^{\mathcal{H}} = \mathcal{T}$ erfüllt dann die Sätze.

(c) Wir betrachten die Elemente c, $g(c)$ der Trägermenge. Mit (3') gilt Pc und mit (2) $Lcg(c)$. Damit folgt aus (3') $\neg Pg(c)$ aber mit (4)+(5) $Pg(c)$. Also sind die Sätze nicht erfüllbar.

Aufgabe H2

Betrachten Sie die folgenden universellen, gleichheitsfreien Sätze für 1-stellige Funktionssymbole h und v:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \forall x, y, z\, (x \sim x \wedge (x \sim y \to y \sim x) \wedge (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)) \\
(2) & \forall x\, (h(v(x)) \sim v(h(x))) \\
(3) & \forall x, y\, (x \sim y \to (h(x) \sim h(y) \wedge v(x) \sim v(y))
\end{array}
$$

Bemerkung: Man kann sich vorstellen, dass h und v als Skolemfunktionen für

$$\forall x\, (\exists y\, Hxy \wedge \exists y\, Vxy)$$

eingeführt wurden, und dass $\sim$ als Kongruenzrelation anstelle von $=$ fungiert um mit (2) auszudrücken, dass h und v kommutieren. Was bedeutet das für H und V?

(a) Sei $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, h^{\mathcal{H}}, v^{\mathcal{H}}, \sim^{\mathcal{H}})$ eine Herbrand-Struktur. Beschreiben Sie die Trägermenge $\mathcal{T}$.

(b) Man kann die Teilmenge $\sim^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ so wählen, dass die Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ ein Modell von (1–3) wird. Geben Sie die minimale und die maximale Lösung an. Gibt es auch noch andere Möglichkeiten?

Lösungsskizze:

(a) Da die Signatur keine Konstanten enthält, nehmen wir ein Konstantensymbol c zu $h, v, \sim$ hinzu. Die Trägermenge ist $\mathcal{T} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{i+1} = \{h(t), v(t) \,:\, t \in T_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (d.h. einen Baum, wobei jeder Knoten genau zwei Nachfolger hat).

(b) Die Relation $\sim$ kann z.B. durch $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ (die maximale Lösung) oder wie folgt interpretiert werden:

$s \sim t \Leftrightarrow$ sowohl v als h kommen in s und t gleich oft vor

(die minimale Lösung). Es gibt noch viele andere Lösungen, z.B.:

$s \sim t \Leftrightarrow v$ kommt in s und t gleich oft vor